نشریه علوم دانشگاه خوارزمی
جلد ۱۳، شماره ۳
تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۲

نمودار کنترل همزمان میانگین و واریانس با رهیافت چگالی پیش‌بین بیزی

عاطفه مختاری‌حسن‌آبادی*، منوچهر خردمندنیا؛ دانشگاه اصفهان، گروه آمار

چکیده

استفاده از نموداری واحد برای کنترل همزمان میانگین و واریانس فرآیند، باعث ساده‌تر شدن روند کنترل فرآیند می‌شود. به‌علاوه اگر این نمودار قابلیت تشخیص منبع آلودگی را نیز داشته باشد، سادگی کار دو برابر می‌شود. به‌همین دلیل بسیاری از محققان و صنعتگران به نمودارهای کنترل همزمان توجه ویژه دارند. اخیراً در متون کنترل فرآیندهای آماری، نمودارهای کنترلی معرفی شده است که مبتنی بر استفاده از ایدهٔ چگالی پیش‌بین بیزی هستند. نمودارهای کنترل مبتنی بر این ایده علاوه بر این‌که عدم اطمینان ناشی از برآورد پارامترها را به‌حساب می‌آورند، ما را از اغلب شبیه‌سازی‌های گسترده نیز بی‌نیاز می‌کنند. این نمودارها برای کنترل میانگین و واریانس فرآیندهای یک و چندمتغیره پیشنهاد شده‌اند. تاکنون هیچ پژوهشی در زمینهٔ کنترل همزمان میانگین و واریانس مبتنی بر ایدهٔ چگالی پیش‌بین بیزی انجام نشده است. در تحقیق حاضر با استفاده از ایده چگالی پیش‌بین بیزی، نمودار جدیدی برای کنترل همزمان میانگین و واریانس فرآیندهای یک‌متغیره معرفی و با استفاده از مثال‌های شبیه‌سازی قابلیت‌های مهم این نمودار جدید آشکار شده است. نمودار جدید در مواردی که پارامترها مجهولند کاربرد دارد. به‌عبارت دیگر، عدم اطمینان ناشی از برآورد پارامترها را به‌حساب می‌آورد. این نمودار قادر است منبع آلودگی را تشخیص دهد و نسبت به تغییرات کوچک در میانگین و واریانس حساس است. در این نمودار حدود کنترل به سادگی، بدون نیاز به شبیه‌سازی، از جدول نرمال به‌دست می‌آید.

مقدمه

به‌منظور کنترل توأم میانگین و تغییرپذیری فرآیندهای یک‌متغیره، تاکنون چندین نمودار کنترل همزمان میانگین و واریانس معرفی شده است. با استفاده از نمودارهای کنترل همزمان، مخصوصاً نمودارهایی که قادر به تشخیص منبع آلودگی‌اند، روند کنترل فرآیند ساده‌تر می‌شود. امسی‌کراکن و چاکرابارتی [۲] در مقاله‌ای مروری نمودارهای کنترل همزمان میانگین و واریانس را به‌اجمال معرفی کرده‌اند. چنان‌که آن‌ها نیز اشاره کرده‌اند، برای اولین بار چن و چنگ [۳] استفاده از بیشینهٔ قدر مطلق دو آماره را به‌عنوان آماره کنترل پیشنهاد کردند. آن‌ها نمودار کنترلی باعنوان نمودار MAX را ارائه کردند که از بیشینهٔ قدرمطلق دو آمارهٔ نرمال به‌عنوان آمارهٔ کنترل استفاده می‌کند.

واژه‌های کلیدی: چگالی پیش‌بین بیزی، کنترل همزمان، فرآیند یک متغیره، حدود کنترل
۹۲/۶/۲ پذیرش ۹۲/۱۱/۱
*نویسنده مسئول atefe.mokhtary@yahoo.com

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

چن و همکاران [۴] نمودار Max را با استفاده از ایده میانگین متحرک موزون نمایی تعدیل کرده‌اند و نموداری باعنوان نمودار MaxEwma به‌دست آوردند. خو و همکاران [۵] یک نمودار کنترل MaxEwma معرفی کرده‌اند که در آن از R به‌جای S^2 استفاده شده است. خو و همکاران [۶] همچنین، نمودار کنترل MaxEwma را تعدیل کرده و نموداری ارائه کرده‌اند که آماره‌های دوبار Ewma شده را ترکیب می‌کند که به‌طبع پیچیده‌تر است اما نسبت به تغییرات کوچک و یا متوسط در میانگین و واریانس حساسیت بیش‌تری دارد. در تمامی نمودارهای کنترل مذکور فرض شده که پارامترهای فرآیند معلوم‌اند. همچنین طبق گفتهٔ امسی‌کراکن و چاکرابارتی [۲]، اغلب نمودارهای کنترل همزمان مربوط به وضعیتی است که در آن پارامترهای فرآیند معلوم فرض می‌شوند و در حالتی که این پارامترها باید برآورد شوند بررسی‌های کم‌تری انجام شده است. آن‌ها در مقالهٔ مروری خود، به برخی از نمودارهای کنترل همزمان که نامعلومی پارامترها را به‌حساب می‌آورند، اشاره کرده‌اند. اگر در محاسبهٔ تمامی آماره‌های کنترل مذکور، برآورد پارامترها به‌جای مقادیر معلوم فرضی قرار داده شوند دیگر حدود کنترل مربوط قابل استفاده نیستند. جنسن و همکاران [۷] در مقاله‌ای مروری تأثیر برآورد را روی چندین نمودار کنترل بررسی کرده و نشان داده‌اند که در محاسبهٔ آماره‌های کنترلی که بر اساس فرض معلوم بودن پارامترها استوار هستند اگر برآورد پارامترها استفاده شود، عدم اطمینان موجود در برآورد پارامترها به‌شدت باعث تخریب عمل‌کرد نمودار می‌شود.

در سال‌های اخیر به ایدهٔ به‌کارگیری چگالی پیش‌بین بیزی در طراحی نمودارهای کنترل توجه شده است و در بعضی موارد برتری آن نسبت به نمودارهای کنترل مشهور موجود آشکار شده است. نمودارهای کنترل مبتنی بر این ایده علاوه بر این‌که نامعلومی پارامترها را به‌حساب می‌آورند، ما را از اغلب شبیه‌سازی‌های گسترده نیز بی‌نیاز می‌کنند. این نمودارهای کنترل برای فرآیندهای یک‌متغیره و چندمتغیره کاربرد دارند. ایدهٔ به‌کارگیری چگالی پیش‌بین بیزی در طراحی نمودارهای کنترل متعلق به منزفریخ است [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]. وی با استفاده از این ایده نمودارهایی برای کنترل میانگین و واریانس فرآیندهای یک و چندمتغیره ارائه کرده است. تاکنون هیچ پژوهشی در زمینهٔ کنترل همزمان میانگین و واریانس مبتنی بر ایدهٔ چگالی پیش‌بین بیزی انجام نشده است.

در تحقیق حاضر با استفاده از ایدهٔ چگالی پیش‌بین بیزی یک نمودار کنترل توأم جدید برای میانگین و واریانس معرفی می‌کنیم که از بیشینهٔ قدرمطلق دو آماره به‌عنوان آماره کنترل استفاده می‌کند. سپس با استفاده از مثال‌های شبیه‌سازی شده عمل‌کرد آن را ارزیابی می‌کنیم و این نمودار کنترل را نمودار BPD می‌نامیم.

گزیده‌ای از چند نظریهٔ توزیعی یک متغیره

توزیع t غیرمرکزی: گوییم t دارای توزیع t غیرمرکزی با پارامترهای v (درجهٔ آزادی)، μ (پارامتر مکانی) و

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

σ^2 (پارامتر مقیاس) است و آن را با نماد $t \sim t_1(\mu, \sigma^2, v)$ نشان می‌دهیم هرگاه تابع چگالی احتمال آن بدین‌صورت باشد:

$$p(t|\mu,\sigma^2,v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{(\pi v\sigma^2)^{1/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left[1+\frac{1}{v\sigma^2}(t-\mu)^2\right]^{-\frac{v+1}{2}} \quad , \quad -\infty < t < \infty \qquad (۱)$$

یکی از خواص مهم این توزیع که در این پژوهش نیز از آن استفاده کرده‌ایم بدین‌صورت است:

$$\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2} \sim F_{1,v} \qquad (۲)$$

توزیع گاما: گوییم x دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β است و آن را با نماد $x \sim Ga(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم هرگاه تابع چگالی احتمال آن به این شکل باشد:

$$p(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad , \quad x > 0 \ , \ \alpha,\beta > 0 \qquad (۳)$$

توزیع وارون گاما: گوییم x دارای توزیع وارون گاما با پارامترهای α و β است و آن را با نماد $x \sim IG(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم هرگاه $\frac{1}{x} \sim Ga(\alpha,\beta)$. تابع چگالی احتمال x بدین‌صورت است:

$$p(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{x}} \quad , x > 0 \quad , \ \alpha,\beta > 0 \qquad (۴)$$

چگالی پیش‌بین بیزی

فرض کنید x یک متغیر تصادفی باشد که توزیع آن به پارامتر(های) θ بستگی دارد (θ ممکن است اسکالر و یا بردار باشد). فرض کنید که $x_1, x_2, \dots x_n$ به شرط θ یک نمونه تصادفی از x باشد. تابع درست‌نمایی حاصل از این نمونه را با نماد $p(x_1, x_2, \dots, x_n \,|\theta)$ و توزیع پیشین را با نماد $p(\theta)$ نشان داده‌ایم. در واقع اطلاع راجع به پارامتر θ قبل از به‌دست آوردن اطلاعات نمونه‌ای در توزیع پیشین $p(\theta)$ خلاصه شده است. از ترکیب اطلاعات پیشین با اطلاعات نمونه‌ای توزیع پسین حاصل می‌شود که آن را با نماد $p(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ نشان داده‌ایم.

برای پیش‌بینی مشاهدهٔ جدید x_{n+1} و بررسی رفتار آن بر مبنای مشاهدات قبلی $x_1, x_2, \dots, x_n$، استفاده از تابع چگالی احتمال $p(x_{n+1}|x_1, x_2, \dots, x_n)$ معقول است. این تابع چگالی احتمال را چگالی پیش‌بین بیزی می‌نامیم. توجه کنید که x_{n+1} به شرط θ مستقل از $x_1, x_2, \dots x_n$ است ولی به‌صورت غیرشرطی مستقل از $x_1, x_2, \dots x_n$ نیست چگالی پیش‌بین بیزی x_{n+1} بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p(x_{n+1}|x_1, x_2, \dots, x_n) &= \int p(x_{n+1}, \theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\, d\theta \\ &= \int p(x_{n+1}|\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)\, p(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\, d\theta \\ &= \int p(x_{n+1}|\theta)\, p(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)\, d\theta \end{aligned} \qquad (۵)$$

چگالی پیش‌بین بیزی به پارامتر θ بستگی ندارد. این ویژگی، چگالی پیش‌بین بیزی را به معیاری مناسب برای استنباط راجع به مقدار مشاهدات آینده بر مبنای مشاهدات گذشته تبدیل کرده است. لازم به ذکر است که در

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

مبحث کنترل کیفیت فرآیند آماری با رهیافت چگالی پیش‌بین بیزی، چگالی پیش‌بین بیزی برای تابعی از مشاهدات فاز دوم به‌کار می‌رود.

استنباط بیزی نرمال یک‌متغیره

نمودار کنترلی که در مقالهٔ حاضر معرفی می‌شود نامعلومی پارامترها را به‌حساب می‌آورد و در روند دست‌یابی به آن، از چگالی پیش‌بین بیزی برخی آماره‌ها استفاده می‌شود. در فرآیند محاسبهٔ چگالی پیش‌بین بیزی به توزیع پسین پارامترها نیاز داریم. این نمودار کنترل، همانند اغلب نمودارهای کنترل پرکاربرد بر اساس فرض نرمال بودن فرآیند استوار است. به‌همین دلیل بخش حاضر را به چگونگی دست‌یابی به توزیع‌های پسین در توزیع نرمال یک‌متغیره اختصاص داده‌ایم.

فرض کنید که در فاز اول $x_1, x_2, \dots, x_n$ به شرط μ و σ^2 یک نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشد که در آن μ و σ^2 هر دو مجهولند. آمارهٔ بسنده $T_x = (\bar{x}, s_x^2)$ است که در آن $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ و $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ به‌ترتیب میانگین و واریانس به‌دست آمده از نمونه مذکور است. تمام اطلاعات استنباطی که در نمونه راجع به پارامترها نهفته با آماره بسنده خلاصه می‌شود. توزیع مولفه‌های آماره بسنده عبارت است از:

$$p(\bar{x}|\mu, \sigma^2) = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (۶)$$

$$p(s_x^2|\sigma^2) = Ga\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right) \quad (۷)$$

فرض کنید اطلاعات پیشین راجع به μ و σ^2 در این پیشین‌های مزدوج خلاصه شده باشد:

$$p(\mu|\sigma^2) = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right) \quad (۸)$$

$$p(\sigma^2) = IG\left(\frac{n_0}{2}, \frac{n_0\sigma_0^2}{2}\right) \quad (۹)$$

که در آن μ_0 و n_0 و σ_0^2 ابر پارامترهای پیشین هستند. طبق منطق آمار بیز باید اطلاعات نهفته در آمارهٔ بسنده را با اطلاعات پیشین ترکیب کرد. از ترکیب این دو منبع اطلاعات، این توزیع‌های پسین حاصل می‌شوند:

$$p(\mu|\bar{x}, s_x^2, \sigma^2) = N\left(\mu_*, \frac{\sigma^2}{n_*}\right) \quad (۱۰)$$

$$p(\sigma^2|\bar{x}, s_x^2) = IG\left(\frac{n_*}{2}, \frac{n_*\sigma_*^2}{2}\right) \quad (۱۱)$$

و توزیع پسین کناری μ عبارت است از:

$$p(\mu|\bar{x}, s_x^2) = t_1\left(\mu_*, \frac{\sigma_*^2}{n_*}, n_*\right) \quad (۱۲)$$

که در آن

$$\mu_* = \frac{n_0\mu_0 + n\bar{x}}{n_*} \quad , \quad n_* = n + n_0$$

$$\sigma_*^2 = \left[n_0\sigma_0^2 + (n-1)s_x^2 + \frac{nn_0}{n_*}(\bar{x} - \mu_0)^2\right]/n_* \quad (۱۳)$$

در حالت خاص اگر اطلاعات پیشین وجود نداشته باشد، پیشین جفریز می‌تواند انتخاب مناسبی باشد. پیشین توأم جفریز بدین‌صورت است:

$$p(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad (۱۴)$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

در این حالت توزیع‌های پسین عبارتند از:

$$p(\mu|\bar{x}, s_x^2, \sigma^2) = N\left(\bar{x}, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (۱۵)$$

$$p(\sigma^2|\bar{x}, s_x^2) = IG\left(\frac{n-1}{2}, \frac{(n-1)s_x^2}{2}\right) \quad (۱۶)$$

با انتگرال‌گیری از پسین توأم روی σ^2 توزیع پسین کناری μ بدین‌صورت حاصل می‌شود [۱۲]:

$$p(\mu|\bar{x}, s_x^2) = t_1\left(\bar{x}, \frac{s_x^2}{n}, n-1\right) \quad (۱۷)$$

آماره‌های کنترل میانگین و واریانس و آماره کنترل توأم

فرض کنید که در فاز دوم $y_{tm}, \dots, y_{t2}, y_{t1}$ به شرط μ و σ^2 یک نمونهٔ تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشد که در آن μ و σ^2 هر دو مجهول‌اند. فرض می‌کنیم که داده‌های فاز دوم گروهی‌اند یعنی در هر زمان t یک نمونه mتایی از مشخصهٔ مورد بررسی دریافت می‌شود. میانگین و واریانس حاصل از این نمونه را به‌ترتیب با $\bar{y}_t = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ti}$ و $s_t^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_{ti} - \bar{y}_t)^2$ نشان می‌دهیم.

۱. آمارهٔ کنترل میانگین

میانگین متحرک موزون نمایی $\bar{y}_t$ عبارت است از

$$e_t = (1-\lambda)e_{t-1} + \lambda\bar{y}_t \quad (۱۸)$$

که در آن $0 < \lambda \leq 1$ یک مقدار ثابت است و معقول است قرار دهیم $e_0 = \bar{x}$. می‌توان نشان داد که

$$p(e_t|\mu, \sigma^2) \doteq N\left(\mu, \frac{\lambda}{2-\lambda}\frac{\sigma^2}{m}\right) \quad (۱۹)$$

در صورت استفاده از پیشین‌های مزدوج (۸) و (۹)، چگالی پیش‌بین e_t عبارت است از:

$$p(e_t|\bar{x}, s_x^2) = t_1\left(\mu_*, \sigma_*^2\left[\frac{1}{n_*} + \frac{\lambda}{m(2-\lambda)}\right], n_*\right) \quad (۲۰)$$

آمارهٔ w_{1t} بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$w_{1t} = \frac{(e_t - \mu_*)^2}{\sigma_*^2\left[\frac{1}{n_*} + \frac{\lambda}{m(2-\lambda)}\right]} \quad (۲۱)$$

طبق خاصیت مهم توزیع t غیرمرکزی که در رابطهٔ (۲) نیز به آن اشاره شد، این آماره چگالی پیش‌بین F با 1 و n_* درجهٔ آزادی دارد.

در حالت خاص اگر اطلاعات پیشین راجع به μ و σ^2 وجود نداشته باشد، آمارهٔ w_{1t} بدین‌صورت ساده می‌شود:

$$w_{1t} = \frac{(e_t - \bar{x})^2}{s_x^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{m(2-\lambda)}\right]} \quad (۲۲)$$

که دارای چگالی پیش‌بین F با 1 و n-1 درجهٔ آزادی است. در نمودار کنترل میانگین با رهیافت چگالی پیش‌بین بیزی، w_{1t} به‌عنوان آمارهٔ کنترل استفاده می‌شود و حدود کنترل آن با استفاده از صدک‌های چگالی پیش‌بین w_{1t} حاصل می‌شوند.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

۲. آمارهٔ کنترل واریانس

توزیع s_t^2 به شرط σ^2 عبارت است از:

$$p(s_t^2|\sigma^2) = Ga\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2\sigma^2}\right) \quad (۲۳)$$

در صورت استفاده از پیشین‌های مزدوج (۸) و (۹)، آمارهٔ g_t را به‌صورت $g_t = \frac{s_t^2}{\sigma_*^2}$ تعریف کنید. میانگین متحرک g_t با پهنای w را با نماد w_{2t} نشان دهید و بدین‌صورت تعریف کنید:

$$w_{2t} = \begin{cases} \frac{g_t+g_{t-1}+\cdots+g_{t-w+1}}{w} & t > w \\ \frac{g_1+g_2+\cdots+g_t}{t} & t \le w \end{cases} \quad (۲۴)$$

باتوجه به رابطهٔ (۲۳) و نیز با توجه به این‌که نمونه‌های فاز دوم مستقل از یک‌دیگرند، چگالی پیش‌بین w_{2t} بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$p(w_{2t}|\bar{x}, s_x^2) = \begin{cases} F_{w(m-1),n_*} & t > w \\ F_{t(m-1),n_*} & t \le w \end{cases} \quad (۲۵)$$

در حالت خاص اگر اطلاعات پیشین راجع به μ و σ^2 وجود نداشته باشد، آمارهٔ g_t به $g_t = \frac{s_t^2}{s_x^2}$ ساده می‌شود. در این حالت چگالی پیش‌بین w_{2t} عبارت است از:

$$p(w_{2t}|\bar{x}, s_x^2) = \begin{cases} F_{w(m-1),n-1} & t > w \\ F_{t(m-1),n-1} & t \le w \end{cases} \quad (۲۶)$$

در نمودار کنترل واریانس با رهیافت چگالی پیش‌بین بیزی، w_{2t} به‌عنوان آمارهٔ کنترل استفاده می‌شود و حدود کنترل آن با استفاده از صدک‌های چگالی پیش‌بین w_{2t} به‌دست می‌آید.

۳. آمارهٔ کنترل توأم

می‌توان نوشت:

$$M_t = \Phi^{-1}[H_1(w_{1t})] \sim N(0,1) \quad (۲۷)$$

$$V_t = \Phi^{-1}[H_2(w_{2t})] \sim N(0,1) \quad (۲۸)$$

که در آن $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد، $H_1(\cdot)$ تابع توزیع آمارهٔ w_{1t} و $H_2(\cdot)$ تابع توزیع آمارهٔ w_{2t} است. منظور از توابع توزیع آماره‌های w_{1t} و w_{2t}، توابع توزیع شرطی آن‌ها به شرط $\bar{x}$ و s_x^2 است. در واقع طبق قضیه تبدیل انتگرال احتمال $H_1(\cdot)$ و $H_2(\cdot)$ از توزیع یک‌نواخت پیروی می‌کنند، تابع Φ^{-1} نیز این متغیرهای تصادفی یک‌نواخت را به متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد تبدیل می‌کند.

دراین حالت پیشنهاد می‌کنیم که این آماره به‌عنوان آمارهٔ کنترل توأم استفاده شود:

$$C_t = max\{|M_t|, |V_t|\} \quad (۲۹)$$

اگر مقدار C_t از حد بالای کنترل بیش‌تر شود، نمودار کنترل هشدار می‌دهد. بنا بر این اگر بخواهیم احتمال خطای نوع اول α باشد، باید UCL را طوری تعیین کنیم که داشته باشیم:

$$pr[C_t \le UCL] = 1 - \alpha \quad (۳۰)$$

با توجه به این‌که $\bar{y}_t$ مستقل از s_t^2 است، w_{1t} نیز مستقل از w_{2t} است درنتیجه M_t مستقل از V_t است.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

بنا بر این می‌توان نوشت:

$$pr[C_t \leq UCL] = pr[|M_t| \leq UCL] * pr[|V_t| \leq UCL] = \left[2\Phi(UCL) - 1\right]^2 \qquad (۳۱)$$

و حد بالای کنترل برابر است با:

$$UCL = \Phi^{-1}\left[\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right] \qquad (۳۲)$$

حد بالای کنترل به‌ازای برخی مقادیر α در جدول ۱ داده شده است.

جدول ۱. حد بالای کنترل نمودار BPD به‌ازای برخی مقادیر α

α	UCL
۰/۰۰۲۷	۳/۲۰۴۹
۰/۰۰۵	۳/۰۲۳۰
۰/۰۱	۲/۸۰۶۲
۰/۰۵	۲/۲۳۶۵

الگوریتم به‌کارگیری نمودار کنترل BPD

مراحل پیاده‌سازی نمودار کنترل BPD بدین‌شرح است:

- مقادیر M_t ، V_t و C_t برای هر زیرگروه از مشاهدات فاز دوم محاسبه شود.
- با توجه به اندازهٔ خطای نوع اول مورد نظر، حد بالای کنترل از رابطه (۳۲) محاسبه شود.
- نمودار کنترل را بر اساس آمارهٔ C_t رسم کنید به‌طوری که اگر میانگین خارج از وضعیت کنترل باشد، برای آمارهٔ کنترل در زیرگروه متناظر علامت "*" را به‌کار برد، اگر واریانس از وضعیت کنترل خارج باشد، علامت "□" و اگر هر دو مشخصه خارج از وضعیت کنترل باشند، هر دو علامت "*" و "□" را توأماً به‌کار برد.

بر اساس نمودار کنترلی که با این الگوریتم رسم می‌شود، علاوه بر پی بردن به‌وضعیت خارج از کنترل بودن فرآیند، می‌توان دریافت که هشدار مربوط به کدام یک از میانگین و یا واریانس بوده است.

مثال‌های شبیه‌سازی

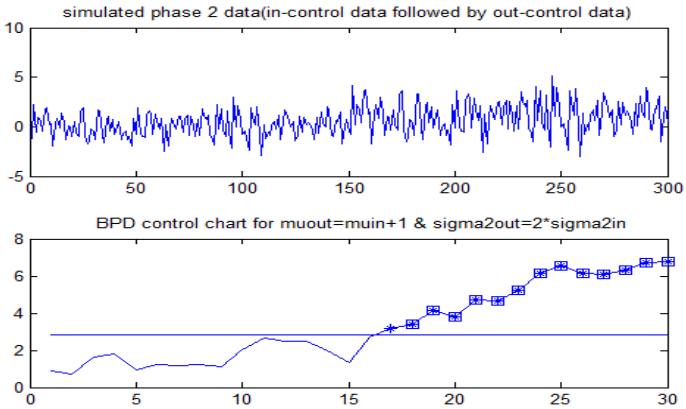
در همهٔ مثال‌های این بخش، مقدار پارامتر هموارساز λ برابر ۰/۲، احتمال خطای نوع اول برابر ۰/۰۱ و پهنای میانگین متحرک برابر با ۵ است.

مثال۱: با استفاده از برنامهٔ متلب، تعداد ۱۰۰ مشاهده تکی از توزیع $N(\mu_{in}, \sigma_{in}^2)$ تولید شد که در آن $\mu_{in} = 0$ و $\sigma_{in}^2 = 1$ به‌ترتیب میانگین و واریانس فرآیند تحت کنترل است. فرض کردیم که این مشاهدات مربوط به فاز اول فرآیند است. میانگین و واریانس حاصل از این مشاهدات بدین‌شرح مشاهده شد:

$$\bar{x} = 0.0248 \qquad , \qquad s_x^2 = 0.9627$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

به‌عنوان مشاهدات فاز دوم، ۳۰ نمونهٔ ۱۰ تایی از توزیع نرمال شبیه‌سازی شد، بدین ترتیب که ۱۵ نمونه اول در شرایط تحت کنترل و در نتیجه از $N(\mu_{in}, \sigma_{in}^2)$ تولید شد و ۱۵ نمونه دوم در شرایط خارج از کنترل و بر اساس $\mu_{out} = \mu_{in} + 1$ و $\sigma_{out}^2 = 2\sigma_{in}^2$ تولید شد. در واقع برای ۱۵ نمونهٔ دوم میانگین را به‌اندازهٔ یک انحراف معیار افزایش داده و واریانس را دو برابر کردیم. بر اساس جدول ۱ حد بالای کنترل متناظر با این شبیه‌سازی برابر با $UCL = 2.8062$ است. مشاهداتی که به این طریق به‌عنوان مشاهدات فاز دوم تولید شده‌اند، در شکل ۱ ملاحظه می‌شوند. نمودار کنترل BPD نیز در این شکل ارائه شده است. چنان‌که ملاحظه می‌شود، در این نمودار ۱۵ نقطهٔ اول تحت کنترل رسم شده اما از نقطهٔ ۱۶ به بعد که متناظر با داده‌های آلوده است، پس از دو نقطهٔ هشدار خروج از کنترل شروع شده است. اولین هشدار این نمودار تنها آلودگی میانگین را هشدار می‌دهد اما سایر هشدارها به‌جا و آلودگی توأم میانگین و واریانس را هشدار می‌دهند.



شکل۱. نمودار کنترل BPD برای آلودگی شبیه‌سازی شده در میانگین و واریانس فرآیند

به‌منظور درک بهتر رفتار این نمودار کنترل، مقادیر آماره‌های مورد نیاز برای محاسبهٔ آمارهٔ کنترل و مقادیر آمارهٔ کنترل C_t برای هر نمونهٔ فاز دوم محاسبه و در جدول ۲ ارائه شده است. مقادیری از آماره C_t که از حد بالای کنترل بزرگ‌تر است، موجب هشدار خروج از کنترل می‌شود. هشدار خروج از کنترل ممکن است به‌دلیل آلودگی در میانگین، واریانس و یا هر دوی آن‌ها باشد. نمودار BPD قادر به تشخیص منبع آلودگی است. در این نمودار آلودگی یا عدم آلودگی میانگین و واریانس به‌ترتیب با آماره‌های M_t و V_t تعیین می‌شود. اگر قدر مطلق M_t، قدر مطلق V_t و یا قدر مطلق هر دو آن‌ها از حد بالای کنترل بیش‌تر شود، نتیجه می‌شود که به‌ترتیب آلودگی در میانگین، آلودگی در واریانس و یا آلودگی در هر دوی آن‌ها باعث ایجاد هشدار خروج از کنترل شده است. با بررسی مقادیر M_t و V_t متناظر با نمونه‌های آلوده که منجر به هشدار خروج از کنترل شده‌اند، متوجه می‌شویم که به جز اولین هشدار، تمامی هشدارها به‌جاست و به‌دلیل آلودگی در هر دوی میانگین و واریانس است. مقادیری از آمارهٔ M_t که قدر مطلق آن‌ها از حد بالای کنترل بیش‌تر شده را با علامت "*" و این مقادیر از آماره V_t را با علامت "□" نشان دادیم. به این ترتیب علائم مربوط به ستون C_t نیز توجیه می‌شوند.

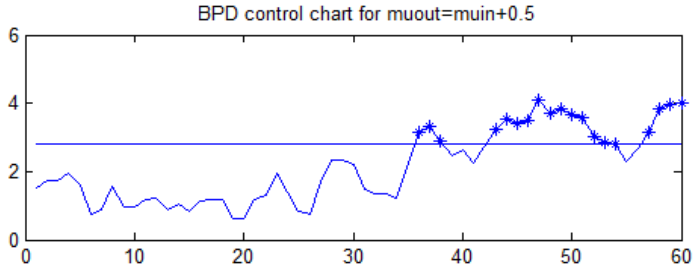
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

جدول۲. مقادیر آماره‌های مورد نیاز برای رسم نمودار BPD به‌ازای هر نمونه فاز دوم

t	$\overline{y}_t$	s_t^2	w_{1t}	w_{2t}	M_t	V_t	C_t
۱	۰/۵۷۹۹	۱/۳۶۵۵	۰/۶۰۶۴	۱/۴۱۸۴	۰/۱۵۶۱	۰/۸۷۶۲	۰/۸۷۶۲
۲	-۰/۱۵۱۴	۱/۰۳۹۰	۰/۱۴۱۳	۱/۲۴۸۹	-۰/۵۴۷۱	۰/۷۰۹۲	۰/۷۰۹۲
۳	-۰/۲۳۶۶	۱/۴۵۴۸	۰/۰۰۴۴	۱/۳۳۶۳	-۱/۶۲۰۷	۱/۰۲۳۷	۱/۶۲۰۷
۴	۰/۰۹۴۷	۱/۴۵۲۱	۰/۰۰۲۰	۱/۳۷۹۳	-۱/۸۰۰۱	۱/۲۳۴۱	۱/۸۰۰۱
۵	-۰/۶۲۶۴	۰/۷۶۰۶	۰/۷۶۹۹	۱/۲۶۱۵	۰/۲۹۹۳	۰/۹۵۴۵	۰/۹۵۴۵
۶	۰/۴۲۶۱	۱/۴۰۷۸	۰/۰۱۹۳	۱/۲۷۰۲	-۱/۲۲۵۲	۰/۹۸۲۴	۱/۲۲۵۲
۷	-۰/۱۹۷۶	۱/۳۵۴۵	۰/۱۷۹۱	۱/۳۳۵۸	-۰/۴۴۸۵	۱/۱۸۵۴	۱/۱۸۵۴
۸	۰/۱۶۴۹	۰/۸۲۴۳	۰/۰۲۰۱	۱/۲۰۴۸	-۱/۲۱۲۹	۰/۷۷۰۰	۱/۲۱۲۹
۹	۰/۴۷۶۷	۱/۹۳۴۰	۰/۲۷۰۹	۱/۳۰۴۹	-۰/۲۶۳۴	۱/۰۹۰۹	۱/۰۹۰۹
۱۰	۰/۲۶۷۴	۲/۴۱۳۷	۰/۵۷۲۶	۱/۶۴۸۳	۰/۱۲۳۱	۲/۰۴۳۵	۲/۰۴۳۵
۱۱	-۰/۲۰۴۹	۲ /۶۷۷۳	۰/۰۸۰۱	۱/۹۱۲۱	-۰/۷۶۴۵	۲/۶۵۷۰	۲/۶۵۷۰
۱۲	-۰/۰۳۷۶	۱/۰۲۰۴	۰/۰۱۹۳	۱/۸۴۲۷	-۱/۲۲۵۵	۲/۵۰۳۷	۲/۵۰۳۷
۱۳	۰/۱۴۸۴	۰/۷۴۸۵	۰/۰۸۱۰	۱/۸۲۶۹	-۰/۷۶۰۶	۲/۴۶۸۱	۲/۴۶۸۱
۱۴	۰/۳۳۶۰	۰/۹۸۵۷	۰/۴۴۱۳	۱/۶۲۹۹	-۰/۰۲۰۲	۱/۹۹۷۳	۱/۹۹۷۳
۱۵	۰/۱۰۱۲	۱/۲۵۵۶	۰/۴۰۷۸	۱/۳۸۹۳	-۰/۰۶۱۶	۱/۳۴۴۶	۱/۳۴۴۶
۱۶	۱/۸۲۰۱	۲/۷۳۱۰	۹/۱۷۷۸	۱/۴۰۰۵	۲/۷۳۴۴	۱/۳۷۷۱	۲/۷۳۴۴
۱۷	۰/۷۸۵۹	۲/۰۷۸۱	۱۲/۱۸۹۸	۱/۶۲۰۲	۳/۱۸۶۷*	۱/۹۷۲۷	۳/۱۸۶۷*
۱۸	۰/۶۶۵۴	۲/۹۰۹۷	۱۳/۶۲۹۳	۲/۰۶۹۲	۳/۳۷۸۴*	۲/۹۸۵۴ □	۳/۳۷۸۴ □*
۱۹	۱/۱۳۳۹	۲/۹۰۴۱	۲۰/۳۳۴۱	۲/۴۶۷۷	۴/۱۳۳۲*	۳/۷۲۱۴ □	۴/۱۳۳۲ □*
۲۰	۰/۱۱۴۱	۱/۵۲۱۳	۱۳/۹۳۳۸	۲/۵۲۲۹	۳/۴۱۷۳*	۳/۸۱۴۰ □	۳/۸۱۴۰ □*
۲۱	۱/۶۰۲۶	۲/۸۱۵۵	۲۷/۰۳۷۵	۲/۵۴۰۵	۴/۷۳۸۵*	۳/۸۴۳۱ □	۴/۷۳۸۴ □*
۲۲	۰/۷۲۰۶	۲/۷۰۹۰	۲۶/۳۷۷۵	۲/۶۷۱۶	۴/۶۸۳۸*	۴/۰۵۳۹ □	۴/۶۸۳۸ □*
۲۳	۱/۲۳۳۳	۱/۶۴۸۶	۳۳/۶۸۷۲	۲/۴۰۹۶	۵/۲۴۵۰*	۳/۶۲۱۵ □	۵/۲۴۵۰ □*
۲۴	۱/۶۷۴۲	۳/۸۶۸۰	۴۸/۴۰۲۹	۲/۶۰۹۸	۶/۱۵۳۲*	۳/۹۵۵۹ □	۶/۱۵۳۲ □*
۲۵	۱/۳۷۸۱	۴/۸۲۷۵	۵۵/۷۱۷۲	۳/۲۹۶۷	۶/۵۲۹۲*	۴/۹۳۵۲ □	۶/۵۲۹۲ □*
۲۶	۰/۷۱۰۲	۵/۳۵۴۵	۴۸/۰۶۷۳	۳/۸۲۴۲	۶/۱۳۵۰*	۵/۵۵۵۵ □	۶/۱۳۵۰ □*
۲۷	۰/۹۴۶۸	۲/۰۴۰۸	۴۶/۷۸۴۶	۳/۶۸۵۳	۶/۰۶۴۳*	۵/۴۰۱۲ □	۶/۰۶۴۳ □*
۲۸	۱/۲۰۹۹	۱/۴۹۷۰	۵۰/۹۰۱۹	۳/۶۵۳۸	۶/۲۸۶۳*	۵/۳۶۵۴ □	۶/۲۸۶۳ □*
۲۹	۱/۴۷۵۲	۱/۹۷۱۵	۵۹/۹۴۵۱	۳/۲۵۹۸	۶/۷۲۹۵*	۴/۸۸۸۱ □	۶/۷۲۹۵ □*
۳۰	۱/۱۴۳۱	۲/۵۱۱۱	۶۰/۲۶۱۴	۲/۷۷۸۶	۶/۷۴۴۰*	۴/۲۱۸۶ □	۶/۷۴۴۰ □*

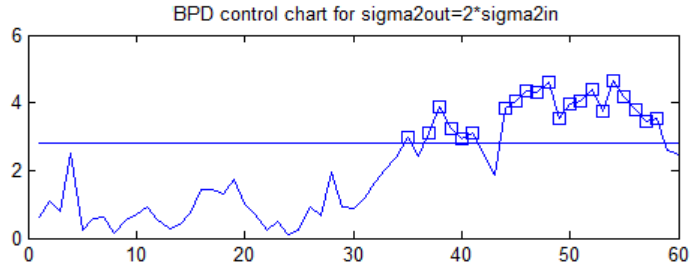
مثال ۲: در بررسی شبیه‌سازی دیگری، تمامی شرایط مثال ۱ را به‌کار بردیم با این تفاوت که اولاً به‌جای این‌که در فاز دوم ۱۵+۱۵ نمونه تولید کنیم، تعداد ۳۰+۳۰ نمونه تولید کردیم، ثانیاً به‌جای ایجاد آلودگی در میانگین و واریانس، فقط میانگین را آلوده کرده و میانگین خارج از کنترل را برابر $\mu_{out} = \mu_{in} +$ ۰/۵ قرار دادیم. نمودار کنترل به‌دست آمده از این بررسی در شکل ۲ ارائه شده است. این نمودار پس از شش نقطه هشدار خروج از کنترل را شروع کرده و ۱۹ نقطه از ۳۰ نقطهٔ آلوده را خارج از کنترل رسم کرده است. از این بررسی و تکرارهای دیگر آن نتیجه می‌شود که نمودار BPD نسبت به تغییرات کوچک میانگین حساسیت نشان می‌دهد و با افزایش میزان این آلودگی، سرعت تشخیص نمودار نیز افزایش می‌یابد و از تعداد تشخیص‌های غلط مبنی بر تحت کنترل بودن فرآیند در حالی که فرآیند خارج از کنترل است، کاسته می‌شود. به‌علاوه در این نمودار کنترل هیچ‌گونه هشدار غلط مبنی بر خارج از کنترل بودن واریانس در حالی که تنها میانگین آلوده شده است، دیده نمی‌شود. این نمودار کنترل در تشخیص انواع آلودگی‌های کاهشی میانگین نیز قابلیت دارد.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]



شکل۲. نمودار کنترل BPD برای آلودگی شبیه‌سازی شده در میانگین فرآیند

مثال۳: در یک بررسی شبیه‌سازی دیگر، تمامی شرایط مثال ۱ را به‌کار بردیم با این تفاوت که اولاً به‌جای این‌که در فاز دوم ۱۵+۱۵ نمونه تولید کنیم، تعداد ۳۰+۳۰ نمونه تولید کردیم؛ ثانیاً تنها واریانس فرآیند را آلوده کردیم و واریانس خارج از کنترل را برابر با $\sigma_{out}^2 = 2\sigma_{in}^2$ قرار دادیم. نمودار کنترل متناظر با این بررسی شبیه‌سازی در شکل ۳ داده شده است. در این نمودار، پس از ۵ نقطهٔ هشدار خروج از کنترل شروع شده و ۲۱ نقطه از ۳۰ نقطهٔ آلوده خارج از کنترل رسم شده است. از این بررسی و تکرارهای دیگر آن نتیجه می‌شود که نمودار BPD در قبال تغییرات نسبتاً کوچک واریانس حساسیت نشان می‌دهد و با افزایش میزان این آلودگی سرعت تشخیص نمودار نیز افزایش می‌یابد و از تعداد تشخیص‌های غلط آن مبنی بر تحت کنترل بودن فرآیند در حالی‌که فرآیند خارج از کنترل است، کاسته می‌شود. در این نمودار هشدار غلط مبنی بر خارج از کنترل بودن میانگین در حالی‌که تنها واریانس فرآیند آلوده شده، دیده نمی‌شود. لازم به ذکر است که عمل‌کرد این نمودار در قبال کاهش واریانس مشابه عمل‌کرد آن در برابر افزایش واریانس است.



شکل۳. نمودار کنترل BPD برای آلودگی شبیه‌سازی شده در واریانس فرآیند

مباحث تکمیلی و نتیجه‌گیری

در همهٔ بررسی‌های شبیه‌سازی بخش قبل، مقدار پارامتر هموارساز λ را برابر ۰/۲ و پهنای میانگین متحرک w را برابر ۵ قرار دادیم، در حالی‌که نحوهٔ عمل‌کرد نمودار BPD تابعی از مقادیر λ و w است. به‌طور کلی با کاهش λ حساسیت این نمودار کنترل نسبت به تغییرات کوچک میانگین افزایش می‌یابد ولی در مورد w، افزایش w است که باعث افزایش حساسیت این نمودار نسبت به تغییرات کوچک واریانس می‌شود.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

در این مقاله نمودار جدیدی برای کنترل توأم میانگین و واریانس معرفی کردیم و آن را به اختصار نمودار BPD نام‌گذاری کردیم. سپس با استفاده از بررسی‌های شبیه‌سازی عمل‌کرد آن را ارزیابی کردیم و بدین نتایج دست یافتیم:

الف) نمودار BPD نامعلومی پارامترها را به‌حساب می‌آورد و حدود کنترل آن بدون نیاز به شبیه‌سازی به‌دست می‌آید؛

ب) نمودار BPD قادر به تشخیص آلودگی و منبع آلودگی است؛

پ) نمودار BPD قابلیت زیادی در شناسایی تغییرات کوچک کاهشی و افزایشی میانگین دارد. این امر ناشی از به‌کارگیری آمارهٔ EWMA برای میانگین است؛

ت) نمودار BPD در شناسایی تغییرات نسبتاً کوچک کاهشی و افزایشی واریانس نیز قابلیت دارد. این امر به‌دلیل استفاده از آمارهٔ میانگین متحرک برای تابعی از واریانس است.

منابع

۱. زهرا جعفری، *مطالعه‌ای بر نمودارهای کنترل چند متغیره برای کنترل همزمان میانگین و تغییرپذیری*، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، گروه آمار دانشگاه اصفهان (۱۳۹۱).

2. A. K. McCracken, S. Chakraborti, "Control Charts for Joint Monitoring of Mean and Variance: An Overview", Quality Technology and Quantitative Management, 10(1) (2013) 17-36.

3. G. Chen, S. W. Cheng, "Max chart: combining X-bar chart and S chart", Statistica Sinica, 8 (1998) 263-271.

4. G. Chen, S. W. Cheng, H. Xie, "Monitoring process mean and variability with one EWMA chart", Journal of Quality Technology, 33(2) (2001) 223-233.

5. M. B. C. Khoo, Z. Wu, C. H. Chen, K. W. Yeong, "Using one EWMA chart to jointly monitor the process mean and variance", Computational Statistics, 25(2) (2010a) 299-316.

6. M. B. C. Khoo, S. Y. Teh, Y. Wu, "Monitoring process mean and variability with one double EWMA chart", Communications in Statistics -Theory and Methods, 39(20) (2010b) 3678-3694.

7. W. Jensen, L. A. Jones-Farmer, C. W. Champ, W. H. Woodall, "Effects of parameter estimation on control chart properties", Journal of Quality Technology, 38(4) (2006) 349-364.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

8. U. Menzefricke, "On the Evaluation of Control Chart Limits Based on Predictive Distributions", Communications in Statistics-Theory and Methods, 31(8) (2002) 1423-1440.
9. U. Menzefricke, "Control Charts for the Generalized Variance Based on its Predictive Distribution", Communications in Statistics-Theory and Methods, 36(5) (2007) 1031-1038.
10. U. Menzefricke, "Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Charts for a Mean Based on its Prediction Distribution", Communications in Statistics-Theory and Methods, 39(16) (2010a) 2942-2960.
11. U. Menzefricke, "Control Charts for the Variance and the Coefficient of Variation Based on their Predictive Distribution", Communications in Statistics-Theory and Methods, 39(16) (2010b) 2930-2941.
12. P. M. Lee, "Bayesian Statistics: An introduction", Arnolds, London (1997).
13. D. C. Montgomery, "Introduction to Statistical Quality Control, 6th edition", Wiley, New York (2009).

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]