

## گروه خودریختی‌های یک $(۱۹, ۱۵, ۳)$ -۲ طرح متقارن

عبدالرضا اسکویی: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی  
 غلامرضا صفا کیش‌همدانی: دانشگاه بوعلی‌سینا همدان  
 محمدجواد اسلامپور: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

### چکیده

در این مقاله گروه خودریختی طرح‌های متقارن با  $\lambda = ۳$  بررسی شده است، و در حالت خاص، یک  $(۱۹, ۱۵, ۳)$ -۲ طرح متقارن که وجود یا عدم آن معلوم نیست در نظر گرفته و ثابت شده است که اگر  $f$  یک خودریختی از این طرح باشد، آن گاه  $O(f) = ۲^a ۳^b ۵^c ۱۹^d$ . همچنین درباره نقاط ثابت این خودریختی‌ها نتایجی به دست آمده است.

### ۱- مقدمه

فرض کنید  $X$  یک  $v$ -مجموعه و  $P_i(X)$  مجموعه  $i$ -زیر مجموعه‌های  $X$  باشند. دوتایی  $D = (X, \mathbf{B})$  که در آن  $\mathbf{B}$  گردایه‌ای از عناصر  $P_k(X)$  (معمولاً بلوک نامیده می‌شوند) است، یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح بلوکی (یا به طور خلاصه طرح) می‌نامیم. هرگاه هر عضو از  $P_2(X)$ ،  $\lambda$  بار در بلوک‌های  $\mathbf{B}$  ظاهر شود، اگر  $|\mathbf{B}| = v$  آن گاه طرح را متقارن می‌گوییم. در هر طرح متقارن، دفعات ظهور هر عنصر  $X$  در بلوک‌های  $\mathbf{B}$ ، برابر با  $k$  است.

مثال: قرار دهید  $X = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۷\}$  و

$$\begin{aligned} \mathbf{B}: \quad B_1 &= \{1, 2, 3\} & B_4 &= \{2, 4, 6\} & B_6 &= \{3, 4, 7\} \\ B_2 &= \{1, 4, 5\} & B_5 &= \{2, 5, 7\} & B_7 &= \{3, 5, 6\} \\ B_3 &= \{1, 6, 7\} \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود  $D = (X, \mathbf{B})$ ، یک  $(۷, ۳, ۱)$ -۲ طرح متقارن است.

نگاشت  $\psi$  بین دو طرح  $D = (X, \mathbf{B})$  و  $D' = (X', \mathbf{B}')$  یک یک‌ریختی نامیده می‌شود، هرگاه  $\psi: X \rightarrow X'$  یک تناظر یک به یک باشد به طوری که  $\psi(\mathbf{B}) = \mathbf{B}'$ .

هر یک‌ریختی از یک طرح  $D$  به توی خودش را یک خودریختی می‌نامیم. مجموعه کلیه خودریختی‌های طرح  $D$  همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می‌دهد که به آن گروه خودریختی‌های طرح می‌گویند.

و با  $\text{Aut}(D)$  نمایش داده می‌شود. گروه خودریختی‌های یک طرح، راهی برای یافتن طرح است که محققان زیادی از این طریق طرح‌هایی که قبلاً وجود یا عدم آن‌ها معلوم نبوده یافته‌اند.

فرض کنید  $f \in \text{Aut}(D)$  و  $D = (X, \mathbf{B})$  تعریف می‌کنیم:

$$\text{fix}(f) = \{x \in X : f(x) = x\},$$

$$\text{مدار } x = (x) = \{f(x) : f \in \text{Aut}(D)\}.$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که مدارها  $X$  را افراز می‌کنند.

اگر  $\alpha \in \text{Aut}(D)$  و  $D$  یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح متقارن باشد، آن گاه  $\alpha$  یک خودریختی روی بلوک‌ها القا می‌کند که با  $\alpha_B$  نمایش می‌دهیم. اگر  $D$  یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح متقارن باشد، آن گاه ارتباط نزدیکی بین  $\alpha$  و  $\alpha_B$  وجود دارد.

**مثال:**  $(26)(45) = \alpha$  یک خودریختی طرح داده شده در مثال قبل است. با اعمال  $\alpha$  روی بلوک‌ها داریم:

$$\alpha_B = (B_4 B_5)(B_1 B_7).$$

قضیه زیر موسوم به لم کشی-فروبنیوس است.

**قضیه:** اگر  $G$  گروه جایگشتی روی  $X$  و  $r$  تعداد مدارهای آن روی  $X$  باشد، آن گاه

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} |\text{fix}(\alpha)|.$$

لم زیر تعداد بلوک‌های یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح را بر حسب  $k$ ،  $\lambda$  و  $v$  به دست می‌دهد.

**لم ۱ [۴]:** در یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح  $D = (X, \mathbf{B})$  داریم

$$b = |\mathbf{B}| = \lambda \frac{\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}.$$

لم‌های ۲ و ۳ ارتباط بین  $\alpha$  و  $\alpha_B$  را که  $\alpha$  خودریختی یک طرح متقارن است بیان می‌کنند.

**لم ۲ [۴]:** فرض کنید  $D$  یک طرح متقارن و  $\alpha \in \text{Aut}(D)$ . در این صورت

$$|\text{fix}(\alpha)| = |\text{fix}(\alpha_B)|.$$

**لم ۳ [۴]:** اگر  $D$  یک طرح متقارن و  $G \leq \text{Aut}(D)$ ، آن گاه تعداد مدارهای ساخته شده توسط  $G$  روی نقاط و بلوک‌ها با هم مساوی‌اند.

لم زیر کران بالایی برای تعداد نقاط ثابت یک خودریختی طرح متقارن ارائه می‌کند که نقش اساسی در ادامه مقاله ایفا می‌کند.

**لم ۴ [۲]:** فرض کنید  $D$  یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح متقارن و  $\alpha \in \text{Aut}(D)$  غیر همانی باشد. اگر  $|\text{fix}(\alpha)| = f$ ،

$$f \leq \begin{cases} \frac{1}{4}(v+3k-6) & o(\alpha) \geq 3, \\ \frac{1}{3}(v+2k-4) & o(\alpha) = 2. \end{cases} \quad \text{آن گاه}$$

لم زیر خاصیت مهمی را در مورد طرح‌های متقارن در رابطه با اشتراک بلوک‌ها بیان می‌کند.

لم ۴: هر دو بلوک یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح متقارن در  $\lambda$  نقطه مشترکند.

## ۲- نتایج درباره گروه خودریختی طرح‌های متقارن

در این بخش بعضی از نتایج خودریختی‌هایی از مرتبه عدد اول  $p$  یک طرح متقارن را ارائه می‌کنیم. سپس

در باره طرح‌های متقارن با  $\lambda=3$  نتایج را بیان می‌کنیم.

در سرتاسر این بخش منظور از  $D$  یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح متقارن  $D = (X, \mathbf{B})$  است.

لم ۵: فرض کنید  $\alpha \in \text{Aut}(D)$  و  $o(\alpha) = p$  یک عدد اول باشد در این صورت

(الف) اگر  $B_1, B_2 \in \text{fix}(\alpha_B)$  و  $\lambda < p$  و  $x \in B_1 \cap B_2$  آن گاه  $x \in \text{fix}(\alpha)$

(ب) اگر  $x, y \in \text{fix}(\alpha)$  و  $\lambda < p$  آن گاه کلیه بلوک‌های شامل  $x, y$ ، بلوک ثابت هستند.

(ج) اگر  $1 < p - 1 < \lambda$ ، آن گاه برای هر بلوک  $B$ ،  $B \not\subseteq \text{fix}(\alpha)$ .

اثبات:

(الف) اگر  $x \notin \text{fix}(\alpha)$ ، آن گاه  $\text{orbit}(x) \subseteq B_1 \cap B_2$  و بنا بر این  $|B_1 \cap B_2| \geq p > \lambda$  و این تناقض با لم ۵ است.

(ب) چون  $x, y \in \text{fix}(\alpha)$ ، بنا بر این اگر  $x, y \in B$ ، آن گاه  $x, y \in \alpha_B$ . اگر  $\alpha(B) \neq B$ ، آن گاه مدار

$B$  تحت  $\alpha$  شامل حداقل  $p$  بلوک است و هر کدام نیز شامل  $x, y$  هستند. پس  $x, y$  حداقل در  $p$

بلوک ظاهر می‌شوند که این متناقض با  $\lambda < p$  است.

(ج) فرض کنید  $B \subseteq \text{fix}(\alpha)$ . اگر  $B'$  یک بلوک  $D$  باشد، آن گاه  $|B \cap B'| = \lambda > 2$ . پس  $B'$  شامل

حداقل دو نقطه ثابت است. بنا بر قسمت (ب)  $B'$  بلوک ثابت است. پس هر بلوک این طرح تحت  $\alpha$

ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه  $\alpha$  خودریختی همانی است که خلاف فرض است.

لم ۷: فرض کنید  $D$  یک  $(v, k, 3)$ -۲ طرح متقارن و  $\alpha \in \text{Aut}(D)$  از مرتبه عدد اول  $p \geq 5$  باشد. اگر بلوک

ثابت  $B_0$  شامل  $m$  نقطه ثابت باشد، آن گاه

$$|\text{fix}(\alpha)| = \frac{2}{3} \binom{m}{2} + 1.$$

**اثبات:** فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ، نقاط ثابت  $B_0$  باشند. هر بلوک دیگر شامل یک زوج از  $x_i$ ها بلوک ثابت است (بنا بر لم ۶). برای هر بلوک ثابت  $B_i$ ، داریم  $|B_i \cap B_0| = 3$  (بنا بر لم ۵) و

$$B_i \cap B_0 \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$$

$S = \{(\{x_i, x_j\}, B) \mid x_i, x_j \in \{x_1, \dots, x_m\}, x_i, x_j \in B, B \neq B_0\}$ .  
 $|S|$  را به دو صورت می‌شماریم. هر بلوک ثابت شامل سه عضو از مجموعه  $\{x_1, \dots, x_m\}$  است تعداد بلوک‌های ثابت به غیر از  $B_0$  برابر  $|fix(\alpha)| - 1$  است. پس  $|S| = 3(|fix(\alpha)| - 1)$ . از طرف دیگر هر زوج از عناصر مجموعه  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  به غیر از  $B_0$  در دو بلوک ثابت دیگر ظاهر می‌شود. پس  $|S| = \binom{m}{2} \times 2$  و در نتیجه  $|fix(\alpha)| = \frac{2}{3} \binom{m}{2} + 1$ .

**لم ۸:** با مفروضات لم ۷، تعداد نقاط ثابت کلیه بلوک‌های ثابت  $D$ ، برابر با  $m$  است.

**اثبات:** فرض کنید  $B_1$  و  $B_2$  دو بلوک ثابت با تعداد نقاط ثابت  $m$  و  $m'$  باشند. در این صورت

$$|fix(\alpha)| = \frac{2}{3} \binom{m}{2} + 1 = \frac{2}{3} \binom{m'}{2} + 1$$

در نتیجه  $m = m'$ .

**نتیجه ۱:** با مفروضات لم ۷، یک  $(|fix(\alpha)|, m, 3)$ -۲ طرح متقارن درون طرح  $D$  وجود دارد.

**اثبات:** قرار دهید  $\mathbf{B}' = \{B \cap fix(\alpha) \mid B \in fix(\alpha_B)\}$ . با توجه به روند اثبات لم ۸،  $\mathbf{B}'$  گردایه‌ای از مجموعه‌های  $m$ -عضوی است. با توجه به لم ۸،  $\mathbf{B}'$  مجموعه بلوک‌های یک  $(|fix(\alpha)|, m, 3)$ -۲ طرح متقارن است.

**لم ۹:** با مفروضات لم ۷، اگر  $o(\alpha)$  مساوی ۲ و یا ۳ باشد، آن گاه

$$|fix(\alpha)| \leq \frac{2}{3} \binom{m}{2} + 1.$$

**اثبات:** چون در این حالت ممکن است اشتراک دو بلوک ثابت، مجموعه نقاط ثابت نباشند، بنا بر این در روند

اثبات لم ۷، تعداد بلوک‌های ثابت شامل یک زوج از عناصر  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ، حداکثر  $|fix(\alpha)| - 1$  است. از این‌جا مطلوب حاصل می‌شود.

**لم ۱۰:** با مفروضات لم ۷،  $|fix(\alpha)| + |fix(\alpha)|(k - m) \leq v$ .

**اثبات:** چون اشتراک هر دو بلوک ثابت زیرمجموعه‌ای از نقاط ثابت است، پس هر بلوک ثابت دارای  $k - m$  نقطه است که در هیچ کدام از بلوک‌های ثابت دیگر ظاهر نمی‌شود. حال شمارش نقاط در بلوک‌های ثابت به نتیجه مطلوب خواهیم رسید.

لم‌های ۷ و ۹، نقش اساسی در بررسی خودریختی‌های از مرتبه عدد اول  $p$  یک  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح متقارن بازی می‌کند و در بخش سوم خواهیم دید که نتایج لم ۷ و ۹ نتایج قوی‌تری نسبت به لم ۴ را به دست می‌دهد.

### ۳- گروه خودریختی یک $(115, 19, 3)$ -۲ طرح متقارن

در این بخش به بررسی گروه خودریختی یک  $(115, 19, 3)$ -۲ طرح متقارن می‌پردازیم. وجود یا عدم این طرح هنوز مشخص نشده است [۳]. همان‌طور که در بخش ۱ مطرح کردیم، گروه خودریختی طرح‌ها راهی برای یافتن طرح است. در این بخش،  $D$  را یک  $(115, 19, 3)$ -۲ طرح متقارن گرفته و خودریختی‌های از مرتبه عدد اول  $p$  آن‌ها را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم  $\alpha \in \text{Aut}(D)$  و  $o(\alpha) = p$  عددی اول باشد. بر اساس قضیه‌ای از Aschbacher [۱] که بیان می‌کند اگر  $\alpha$  یک خودریختی  $(v, k, \lambda)$ -۲ طرح متقارن از مرتبه عدد اول  $p$  باشد، آن گاه  $p \mid v$  یا  $p \leq k$  داریم،

$$p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

**الف:  $o(\alpha) = 17$**

در این حالت، بنا بر لم‌های ۱ و ۴،  $|\text{fix}(\alpha)| \in \{13, 30\}$ . اگر  $B$  یک بلوک ثابت باشد، آن گاه بنا بر لم‌های ۶ (ج) و ۱۰،  $B$  دقیقاً ۲ نقطه ثابت دارد. پس،  $|\text{fix}(\alpha)| = \frac{2}{3} \binom{2}{2} + 1 = 1$  (لم ۸)، که عدد صحیح نیست. پس  $|\text{Aut}(D)| \nmid 17$ .

**ب:  $o(\alpha) = 13$**

مجدداً بنا بر لم ۴،  $|\text{fix}(\alpha)| \in \{11, 24\}$ . لم ۶ (ج) دلالت بر این دارد که هر بلوک ثابت دارای شش نقطه ثابت است و بنا بر این  $|\text{fix}(\alpha)| = 11$ . نتیجه ۱ دلالت بر این دارد که یک  $(11, 6, 3)$ - طرح متقارن درون ساختار این طرح وجود دارد. اما این متناقض با لم ۱۰ است. پس عدد ۱۳ مرتبه گروه خودریختی را عاد نمی‌کند.

**ج:  $o(\alpha) = 11$**

لم ۴ نتیجه می‌دهد که  $|\text{fix}(\alpha)| \in \{5, 16, 27, 38\}$ . که همه موارد مشابه حالت‌های قبل رد می‌شود. پس  $|\text{Aut}(D)| \nmid 11$ .

**د:  $o(\alpha) = 7$**

مجدداً داریم  $|\text{fix}(\alpha)| \in \{3, 10, \dots, 38\}$ . هر بلوک ثابت ۵ یا ۱۲ نقطه دارد. اگر همه بلوک‌ها ۵ نقطه ثابت داشته باشند. در این صورت لم ۸ دلالت دارد که  $|\text{fix}(\alpha)|$  عدد صحیح نیست. پس بلوکی وجود دارد که ۱۲ نقطه ثابت دارد. در نتیجه بنا به لم ۸،  $|\text{fix}(\alpha)| = 45$  که غیر ممکن است. پس  $|\text{Aut}(D)| \nmid 7$ .

$$o(\alpha) = 5: \text{ه}$$

در این جا  $|fix(\alpha)| \in \{0, 5, \dots, 40\}$  که همه حالت‌ها به جز  $|fix(\alpha)| = 0$  بنا به لم ۷ رد می‌شود.

لم ۱۱: اگر  $|Aut(D)| \mid 5^\beta$  آن گاه  $\beta \leq 1$ .

اثبات: فرض کنید  $|Aut(D)| \leq G$  از مرتبه ۲ باشد. پس  $G \simeq C_5 \times C_5$  یا  $G \simeq C_{25}$ . حالت  $G \simeq C_{25}$  به سادگی رد می‌شود. پس  $G \simeq C_5 \times C_5$  و در نتیجه مرتبه هر عنصر ۵ است. پس هیچ‌کدام از عناصر  $G$  به جز عنصر همانی نقطه ثابت ندارند. بنا بر لم کشی-فروبینیوس،

$$r = \frac{1}{25} \sum fix(\alpha) = \frac{115}{25}.$$

که یک تناقض است. پس  $|Aut(D)| \nmid 5^2$ .

$$o(\alpha) = 19: \text{و}$$

در این جا  $|fix(\alpha)| = 1$  و مشابه لم ۱۱،  $|Aut(D)| \nmid 19^2$

قضیه زیر خلاصه بحث‌های فوق است:

قضیه: اگر  $f \in Aut(D)$ ، آن گاه  $o(f) = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 19^\sigma$  که در آن

$$\alpha, \beta, \gamma, \sigma \leq 1$$

(ب) اگر  $o(f) = 19$ ، آن گاه  $|fix(\alpha)| = 1$ ؛

(ج) اگر  $o(f) = 5$ ، آن گاه  $|fix(\alpha)| = 0$ ؛

## منابع

1. M. Aschbacher, *On Collination Groups of Symmetric Block Design*, J. Combinatorial Theory Ser. A **11** (1971) 272-281
2. Bowler, *On the fixed points of an Automorphism of a symmetric design*, J. Combin. Theory Ser. A **43** (1986), 350-343.
3. Brouwer, *Block designs*, pp. 693-745 in Handbook of Combinatorics (ed. R.L. Graham, M. Grottschel, L. Lovasz), Elsevier, Amsterdam (1995).
4. E. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, Cambridge (1983).