اندازه مكان، اندازه مقياس و مرتب سازي توزيعهاي يک متغيره

عين اله پاشا: دانشگاه تربيت معلم تهران
عادل فاطمي : دانشگاه آزاد اسلامي واحد علوم تحقيقات

چكيده

در اين مقاله مفهوم اندازه مكان و مقياس و تعاريف مربوط به مرتب‌سازي جزئي براي مقايسه توزيعها ارائه و بررسي مي‌شود، و نيز با استفاده از تحدب مرتبه k ، روابط مرتب‌سازي تصادفي و پراكندگي ارائه مي‌شوند. و ثابت مي‌شود كه اندازه‌هاي شناخته‌اي مانند ميانگين و انحراف معيار به ترتيب اندازه‌هاي مكان و مقياس‌اند. همچنين تابعي از آنتروپي توزيعها را ارائه مي‌كنيم كه اندازه مقياس است و البته اين خود ارتباطي جالب ميان آنتروپي و واريانس توزيعهاي يک متغيره است.

مقدمه

درروابط مرتب سازي، عموماً مجموعه‌اي از توابع مانند U را در نظر مي‌گيريم به قسمي كه به ازاي uهاي متعلق به U، Eu(X) ويژگي مورد نظر توزيع را اندازه مي‌گيرد. مرتب سازي بر اساس U اينگونه تعريف مي‌شود:

$$X \leq_u Y \quad \text{iff} \quad Eu(X) \leq Eu(Y) \quad \forall\, u \in U \qquad (۳-۱)$$

U مي‌تواند مجموعه‌اي از توابع مطلوب باشد.

تعاريف و نمادها

ما توزيع تجمعيF را اكيداً صعودي مي‌گوييم هرگاه روي مجموعه $S_F = \{x : ۰ < F(x) < ۱\}$ اكيداً صعودي باشد. در اين بررسي ما تنها متغيرهاي تصادفي مطلقا پيوسته و تابع توزيعهاي اكيداً صعودي را بررسي مي‌كنيم و منظور از يک مدل، مجموعه‌اي از تابع توزيعهاست.

تعريف ۲-۱: به ازاي عدد طبيعي n و مقادير حقيقي$y_۱$، $y_۲$،...، y_n، (با همين ترتيب)$S(y_۱, y_۲, \ldots, y_n)$ را برابرتغييرعلامتy_iها تعريف مي‌كنيم، مثلا اگر$n = ٤$ آنگاه $S(-۲, ۱, ۱, -۳) = ۲$ اما$S(-۲, ۱, ۱, ۳) = ۱$ همچنين $S(-۲, ۱, -۳, ۱) = ۳$.

حال فرض كنيم f تابعي حقيقي باشد كه روي زير مجموعه‌اي ازR مانند I تعريف شده، آنگاه

$$S(f) = \sup S\,[f(x_۱), f(x_۲), \ldots, f(x_n)]$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

sup روي مجموعه $\{(x_1, x_2,...x_n) | n\in N,\ x_1< x_2<...< x_n,\ x_i \in I,\ i =1, 2, ..., n\}$ عمل مي‌کند. درحقیقت تابع $S(f)$ تعداد دفعاتي را مي‌شمارد که $f(x)$ محور xها را قطع مي‌کند.

مثال۲-۱: اگر $f(x) = x^2 - 1$ ، $-2 \le x \le 2$ آنگاه $S(f) = 2$ و حال آنکه براي $f(x) = \sin x$، $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ داریم $S(f) = 3$.

واضح است که اگر $f \ge 0$ و یا $f \le 0$ آنگاه $S(f)=0$. گوییم که توابع f و g همدیگر را k مرتبه قطع مي‌کنند، اگر $S(f-g) = k,\ k = 0, 1, 2, ...$.

تعریف۲-۲: تابع f را محدب مرتبه ۰ گوییم هرگاه به ازاي هر $x\in I$ داشته باشیم:

$$f(x)\le(\ge)0,$$

و محدب مرتبه ۱ گوییم هرگاه به ازاي هر $x_1, x_2\in I$ و $x_1< x_2$ داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} \ge(\le) 0$$

به عبارت دیگر تابع f محدب مرتبه ۱ است هرگاه صعودي و یا نزولي باشد. در حالت کلي تابع f محدب را مرتبه k گوییم هرگاه به ازاي هر $x_1,x_2,\ldots,x_{k+1} \in I$ ، $x_1< x_2 <\ldots< x_{k+1}$ داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^{k-1} \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_{k+1}) \end{vmatrix} \ge (\le) 0 \qquad (2-1)$$

اگر kامین مشتق f موجود باشد آنگاه f محدب مرتبه k است اگر و فقط اگر $f^{(k)}(x) \ge (\le) 0$.

نمادگذاري: فرض F_1 و F_2 دو تابع توزیع باشند، در این صورت:

$$R(x) = R(x; F_1, F_2) = F_2^{-1}(F_1(x)), \qquad x \in S_{F1}$$

$$\Delta(x) = R(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x, \qquad x \in S_{F1}$$

$$\Delta^*(x) = R^{-1}(x) - x = F_1^{-1}(F_2(x)) - x, \qquad x \in S_{F2}$$

$$r(x) = r(x; F_1,F_2) = f_1(x) / f_2(F_2^{-1}(F_1(x)), \qquad x \in S_{F1}$$

که $f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}$ و $f_2(x) = \frac{dF_2(x)}{dx}$ به ترتیب چگالي توزیعهاي F_1 و F_2 هستند. تابع R ، تابع جالبي است که مطالعات زیادي بر اساس آن صورت گرفته است. اگر X داراي توزیع F_1 باشد، آنگاه $R(x)$ داراي توزیع F_2 خواهد بود. اگر F_2 توزیعي نمایي با $\lambda = 1$ باشد، آنگاه R تابع خطراست، $R_{(x)} = -\log(1 - F_1(x)) = -\log \overline{F}_1(x)$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

و همچنین r تابع میزان از کارافتادگي F_1 است، یعني $r(x) = R'(x) = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ شیوه دیگري از نمایش r(x) به صورت زیر است :

$$r(x) = \frac{f_1(x)}{1 - F_1(x)} \times \frac{1-F_2(R(x))}{f_2(R(x))} = \frac{\frac{f_1(x)}{F_1(x)}}{\frac{f_2(R(x))}{F_2(R(x))}}$$

این نشان مي‌دهد که درحالت کلي r خارج قسمت توابع میزان از کارافتادگي F_1 و F_2 است. همچنین این نیزقابل توجه است که $r(F_1^{-1}(U)) = \frac{f_1(F_1^{-1}(U))}{f_2(F_2^{-1}(U))}$ که U داراي توزیع یکنواخت پیوسته روي بازه [۰,۱] است.

دراین حالت آنتروپي توزیع F_1 را نیز مي‌توان چنین نوشت:

$$H(F_1) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x) dF_1(x) = -\int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u) du \qquad (۲-۲)$$

$$u = F_1(x)$$

تابع $\Delta(x)$ تابع انتقال نیز نامیده مي‌شود زیرا وقتي X به اندازه $\Delta(x)$ انتقال داده مي‌شود داراي توزیعي مشابه توزیع $Y = \Delta(X) + X$ خواهد بود، که همان F_2 است.

حال تعریف زیررا که تعریف مهمي است ارائه مي‌دهیم.

تعریف۲-۳ : فرض کنیم X متغیري تصادفي با تابع توزیع F_1 و Y متغیري تصادفي با تابع توزیع F_2 باشد، گوییم $F_1 \le_k F_2$ یا به طور معادل $X \le_k Y$ اگر تابع Δ محدب از مرتبه k باشد، $k = 0, 1, 2, \ldots$.

اندازه مکان

تعریف۳-۱ : توابع توزیع F_1 و F_2 را از نظرمکان مقایسه پذیرگوییم هرگاه Δ یا Δ^* محدب مرتبه ۰(یعني نامنفي) باشند و مي‌نویسیم $F_1 c^\circ F_2$، مدل $\mathcal{F}$ را مکاني مي‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \, c^\circ F_2$$

و گوییم F_2 سمت راست F_1 است اگر Δ محدب مرتبه ۰ باشد، یعني $F_1 \le F_2$.

رابطه c° متقارن و بازگشتي است اما انتقالي نیست. واضح است که $F_1 c^\circ F_2$ اگر و تنها اگر F_1 و F_2 هرگز همدیگررا قطع نکنند، مدل $\mathcal{F} = \{F(\circ + a) : a \in R\}$ یک مدل مکاني است، اما همه مدلهاي مکاني اینگونه نیستند.

تابع انتقاليΔ محدب مرتبه ۰،$(\Delta(x) \ge 0)$ است اگر و تنها اگربه ازاي هرx، $F_1(x) \ge F_2(x)$. بنابراین مرتب‌سازي $\le_0$ همان مرتب‌سازي تصادفي است. رابطه $\le_0$ یک مرتب‌سازي جزئي درمدل $\mathcal{F}$ است، یعني بازگشتي، انتقالي و نامتقارن است. اگر $\mathcal{F}$ یک مدل مکاني باشد چون که هر دو عضو $\mathcal{F}$ در $\le_0$ مقایسه پذیرند $(\mathcal{F}, \le_0)$ یک مجموعه مرتب است.

براي یافتن مرتب سازهاي دیگري که براي بررسي مکان مناسب به نظرمي‌رسند باید مرتب‌سازي‌هایي از

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

نوع (۱-۱) را مطالعه کنيم. براي اين منظور مجموعه توابع زير را در نظر بگيريد:

$$C_1 = \{u : \text{تابعي صعودي و پيوسته } u\}$$

$$C_2 = \{\max(0,t) : t \in R\}$$

$$C_3 = \{\min(0,t) : t \in R\}$$

قضيه ۳-۱:

$$F_1 \le_0 F_2 \Leftrightarrow F_1 \le_{c_1} F_2 \;\begin{cases} \nearrow F_1 \le_{c_2} F_2 \\ \searrow F_1 \le_{c_3} F_2 \end{cases}$$

برهان : فرض کنيم که $F_1 \le_0 F_2$ و $u \in C_1$ در اين صورت

$$F_1 \le_0 F_2 \Rightarrow \Delta(x) = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \ge 0 \Rightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) \ge x$$

$$\Rightarrow F_2^{-1}(t) \ge F_1^{-1}(t),$$

$$\Rightarrow u(F_2^{-1}(t)) \ge u(F_1^{-1}(t)),$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u(F_2^{-1}(t))dt \ge \int_0^1 u(F_1^{-1}(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(z)dF_2(z) \ge \int_{-\infty}^{\infty} u(z)dF_1(z)$$

$$\Rightarrow Eu(Y) \ge Eu(X) \Rightarrow F_1 \le c_1 F_2$$

مرتب سازي‌هاي $\le_{c_2}$ و $\le_{c_3}$ نيز حالتهاي خاصي از مرتب‌سازي $\le_{c_1}$اند. براي جهت ديگر يه «ستويان ۱۹۷۲» مراجعه شود.

در بخش بعد خواهيم ديد که مرتب‌سازي‌هاي $\le_{c_2}$ و $\le_{c_3}$ تنها مکان را اندازه نمي‌گيرد، بلکه مقياس را نيز مي‌سنجد.

تعريف۳-۲ : تابع $\psi: \mathcal{F} \to R$ يک اندازه مکان در $\mathcal{F}$ است هرگاه :

الف) براي هر $a,b \in R$ و $F \in \mathcal{F}$ داشته باشيم:

$$\psi(a \times F + b) = a\psi(F) + b$$

(اگر X داراي توزيع F باشد، آنگاه توزيع $aX + b$ را با $a \times F + b$ نشان مي‌دهيم.)

ب) اگر $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ و $F_1 \le_{c_2} F_2$ آنگاه $\psi(F_1) \le \psi(F_2)$.

مثال۳-۱ : $\mathcal{F}$ را يک مدل از توزيعهاي با گشتاور اول متناهي درنظرمي‌گيريم. يعني اگر $X, F \in \mathcal{F}$ داراي توزيعF باشد آنگاه $E(X) < \infty$. دراين صورت$\mu(F) = E(X)$ براي اين خانواده يک اندازه مکان است زيرا اولاً براي هرa , b حقيقي و هر F متعلق به $\mathcal{F}$ داريم:

$$\mu(a \times F + b) = E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu(F) + b$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

ثانیا اگر F_1 ، F_2 $\in \mathcal{F}$ و $F_1 \leq_0 F_2$ آنگاه به ازاي هر x متعلق به S_{F_1} داریم:

$$F_1 \leq_0 F_2 \Rightarrow \Delta(x) = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) \geq x$$
$$\Rightarrow F_2^{-1}(t) \geq F_1^{-1}(t),$$
$$\Rightarrow \int_0^1 F_2^{-1}(t)dt \geq \int_0^1 F_1^{-1}(t)dt$$
$$\Rightarrow E(Y) \geq E(X) \Rightarrow \mu(F_2) \geq \mu(F_1)$$

اندازه مقیاس

هدف ازاین بخش پاسخ به این سوال است که کي و چگونه مي‌توان دو توزیع را از نظر مقیاس مقایسه کرد. این سوال مي‌تواند جوابهاي بیشماري داشته باشد که یکي از این جوابها را در اینجا شرح مي‌دهیم.

تعریف۴-۱: تابع توزیعهاي F_2 و F_1 را درمقیاس مقایسه پذیرگوییم هرگاه Δ یا Δ^* محدب از مرتبه ۱ باشند و مي‌نویسیم $F_1 \, c_1 \, F_2$. مدل $\mathcal{F}$ یک مدل مکاني– مقیاسي است هر گاه به ازاي $F_2 \in \mathcal{F}$ و F_1 بتوان نتیجه گرفت که $F_1 \, c_1 \, F_2$. گوییم مقیاسF_1 ازمقیاس F_2 بزرگترنیست (یا F_1 ازF_2 گسترده‌تر نیست). هرگاه Δ محدب مرتبه ۱ (صعودي) باشد، دراین صورت مي‌نویسیم: $F_1 \leq_1 F_2$.

به وضوح رابطه c^1 یک رابطه بازگشتي و متقارن است اما انتقالي نیست. مدل$\mathcal{F} = \{F(a \circ + b): a,b \in R\}$ یک مدل مکاني مقیاسي است، اما همه خانواده‌هاي مکاني مقیاسي لزوما از این نوع نیستند. مرتب سازي $\leq_1$ همان مرتب‌سازي پراکندگي($\leq_{disp}$) معرفي شده توسط «بیکل و لهمن[1] (۱۹۷۶)» مي‌باشد. آنها چنین بیان کردند که در توزیعهاي F_2 و F_1 که F_1 بیش از F_2 گستره شده است، براي هرu,vي که $0 < u < v < 1$ داریم:

$$F_2^{-1}(v) - F_2^{-1}(u) \geq F_1^{-1}(v) - F_1^{-1}(u) \qquad (۱-۴)$$

(این رابطه به راحتي از محدب مرتبه ۱ بودن $\Delta(x)$ نتیجه مي‌شود) یعني فاصله بین هر دو چندک از توزیع F_2 از فاصله بین چندک‌هاي متناظرآنها از توزیع F_1 بیشتر باشد. همانطور که گفتیم نامساوي (۴-۱) صادق است اگر و تنها اگر$\Delta(x)$ صعودي باشد. بنابراین مرتب سازي $\leq_1$ و $\leq_{disp}$ یکي هستند.

حال بعضي از خواص $\leq_1$ را بررسي مي کنیم.

تعریف۴-۲ : گوییم $F_1 \approx F_2$ هر گاه $F_1 \leq_1 F_2$ و $F_2 \leq_1 F_1$.

قضیه۴-۱ : رابطه $\leq_1$ انتقالي است و داریم:

$$F_1 \approx_1 F_2 \Rightarrow \exists a : F(\circ) = F_2(\cdot + a)$$

برهان : تابع توزیعهاي F_3 ، F_2 و F_1 را در نظر بگیرید به طوري که $F_1 \leq_1 F_2$ و $F_2 \leq_1 F_3$. در این

[1]-Bickel & Lehmann (1976)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

صورت توابع

$$\Delta_1(x) = R_1(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \qquad \Delta_2(x) = R_2(x) - x = F_3^{-1}(F_2(x)) - x ,$$

توابعي صعودي هستند. یعني به ازاي هر $x_1, x_2 \in S_{F_1}$ و $y_1, y_2 \in S_{F_1}$ به طوري که $x_1 < x_2$ و $y_1 < y_2$ داریم:

$$\Delta_1(x_1) \le \Delta_1(x_2) \Rightarrow R_1(x_1) - x_1 \le R_1(x_2) - x_2 \Rightarrow R_1(x_2) - R_1(x_1) \ge x_2 - x_1$$

$$\Delta_2(y_1) \le \Delta_2(y_2) \Rightarrow R_2(y_1) - y_1 \le R_2(y_2) - y_2 \Rightarrow R_2(y_2) - R_2(y_1) \ge y_2 - y_1$$

حال $R_3(x)$ را چنین تشکیل مي‌دهیم:

$$R_3(x) = R_2(R_1(x)) = F_3^{-1}(F_2(F_2^{-1}(F_1(x))) = F_3^{-1}(F_1(x))$$

دراین صورت به ازاي هر $x_1, x_2 \in S_{F_1}$ که $x_1 < x_2$ ، با توجه به دو نامساوي قبلي که به دست آمد داریم:

$$R_3(x_2) - R_3(x_1) = R_2(R_1(x_2)) - R_2(R_1(x_1)) \ge R_1(x_2) - R_1(x_1) \ge x_2 - x_1$$

بنابراین $\Delta_3(x) = R_3(x) - x$ تابعي صعودي است یعني $F_1 \le F_3$. بعلاوه $\Delta(x) = (F_2^{-1}(F_1(x))$ صعودي است اگر و تنها اگر

$$\Delta^*(x) = F_1^{-1}(F_2(x)) - x = -\Delta(F_1^{-1}(F_2(x))$$

نزولي باشد. بنابراین:

$$F_1 \approx_1 F_2 \Leftrightarrow F_1 \le_1 F_2 \ \& \ F_2 \le_1 F_1$$

$$\Leftrightarrow \Delta(x) \text{ صعودي } \& \ \Delta(x) \text{ نزولي } \Leftrightarrow \exists a \in R : \Delta(x) \equiv a$$

$$\Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) - x = a \Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) = a + x$$

$$\Leftrightarrow F_1(x) = F_2(a + x).$$

به آساني مي‌توان دید که $F_1 \, c^1 F_2$ اگر و تنها اگر به ازاي هر $a \in R$، $S(\Delta(0) - a) \le 1$ یعني تابع Δ هیچ خطي موازي محورxها را در بیش از یک نقطه قطع نمي‌کند. و این بر قرار است از و تنها اگر $F_1(0)$ و $F_2(0 + a)$ همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

حال ما دو نوع دیگر از مرتب‌سازي مقیاس $\le_1^*$ ، $\le_1^{**}$ را تعریف مي‌کنیم که از $\le_1$ ضعیف‌تر بوده و براي استفاده ساده ترند.

زماني که $F_1 \, c^1 F_2$ هر سه نوع مرتب سازي $\le_1$، $\le_1^*$ ، $\le_1^{**}$ منطبق هستند، یعني هم زمان رخ مي‌دهند همچنین مرتب سازي $\le^*$ نسبت به مرتب‌سازي واریانس توزیعها قوي‌تر است، یعني:

$$X \le_1^* Y \Rightarrow \sigma^2_X \le \sigma^2_Y$$

تعریف۴-۳ : براي توزیعهاي F_1 و F_2 مي‌گوییم که $F_1 \le_1^{**} F_2$ هرگاه اعدادي حقیقي مانند a,b باشند که

$$\Delta(x) \ge b ; \quad x > a,$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

$$\Delta(x) \le b \; ; \quad x < a,$$

اگر F_2 و F_1 داراي گشتاورهاي اول متناهي μ_{F2} و μ_{F1} باشند. خواهیم گفت $F_1 \le^*_1 F_2$ هرگاه عددي حقیقي مانند a باشد که

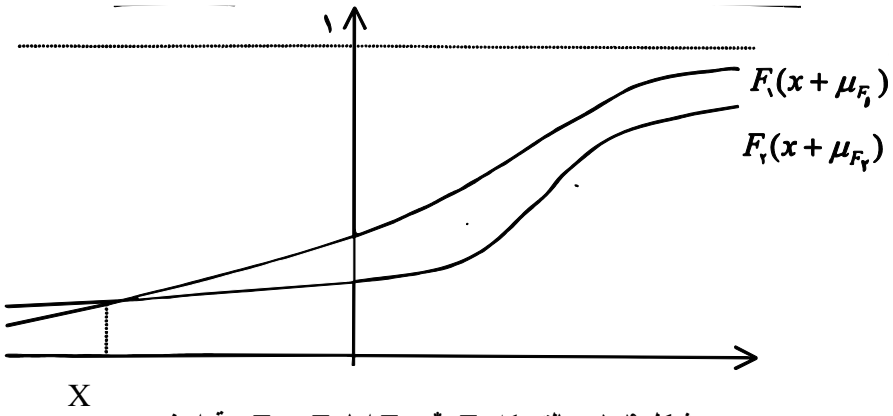
$$\Delta(x) \ge \mu_{F1}-\mu_{F2} \; ; \quad x > a,$$

$$\Delta(x) \le \mu_{F1}-\mu_{F2} \; ; \quad x < a$$

(حالت $\le^*_1$ حالتي است از $\le^{**}_1$ که a با $\mu_{F1}-\mu_{F2}$ جایگزین شده است.) مرتب سازي $\le^{**}_1$ مي‌تواند اینگونه نیزبه کار رود:

$F_1 \le^{**}_1 F_2$ یا $F_2 \le^{**}_1 F_2$ هرگاه $b \in R$ي وجود داشته باشد، به طوري که $S(F_1(\circ) - F_2(\circ + b) = 1$.

یعني براي بعضي ازbها تابع توزیعهاي $F_1(\circ)$ و $F_2(\circ + b)$ همدیگر را دقیقاً دریک نقطه قطع مي‌کنند. به‌علاوه $F_1 \le^*_1 F_2$, $F_2 \le^{**}_1 F_1$ هرگاه $F_1(\circ + \mu_{F1})$ و $F_2(\circ + \mu_{F2})$ همدیگر را دقیقاً در یک نقطه قطع کنند. به وضوح درشکل (۴-۱) مي‌توان دید که $F_1 \le^*_1 F_2$ برقرار است، اما $F_1 \le F_2$ برقرار نیست، زیرا اگر $F_2(\circ + \mu_{F2})$ را اندکي رو به چپ انتقال دهیم $F_1(\circ + \mu_{F1})$ را در دو نقطه قطع خواهد کرد وحال آنکه در مرتب سازي $\le_1$ گفتیم که F_2 و F_1 را اگر به هر اندازه انتقال دهیم همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع مي‌کنند.



شکل ۴-۱: حالتي که $F_1 \le^*_1 F_2$ اما $F_1 \le F_2$ برقرار نیست

قضیه ۴-۲ : روابط زیر برقرارند:

الف) $F_1 \le F_2 \; (\Leftrightarrow F_1 \le_{disp} F_2) \Rightarrow F_1 \le_1^* F_2 \Rightarrow F_1 \le_1^{**} F_2$

ب) اگر F_2 و F_1 از نظر مقیاس قویا مقایسه پذیر باشند، آنگاه

$F_1 \le F_2 \; (\Leftrightarrow F_1 \le_{disp} F_2) \Leftrightarrow F_1 \le_1^* F_2 \Leftrightarrow F_1 \le_1^{**} F_2$

برهان : (الف) چون $F_1 \le_1 F_2$ بنابراین $\Delta(x)$ تابعي صعودي است، پس به ازاي هر x_o دلخواه داریم :

$$X > (<) x_o \Rightarrow \Delta(x) \ge (\le) \Delta(x_o)$$

بالاخص براي $x_o = \Delta^* \mu_{F1}-\mu_{F2}$ و

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

$$x > (<)\Delta^* (\mu_{F1}-\mu_{F2}) \Rightarrow \Delta(x) \geq (\leq)\ \Delta(\Delta^* (\mu_{F1}-\mu_{F2})) = \mu_{F1}-\mu_{F2}$$

پس کافي است a را برابر $\Delta^*(\mu_{F1}-\mu_{F2})$ بگیریم تا داشته باشیم $F_1 \leq^*_1 F_2$. در رابطه بالا درمورد $\leq^*_1$ اگر $a = \Delta^*(\mu_{F1}-\mu_{F2})$ و $b = \mu_{F1}-\mu_{F2}$ ثابت مي شود که $F_1 \leq_1^{**} F_2$

(ب) یک طرف این رابطه درقسمت قبل ثابت شد حال براي اثبات طرف دیگر فرض مي‌کنیم $F_1 <_1^{**} F_2$ و فرض کنیم که F_2 و F_1 ازنظر مقیاس قویاً مقایسه پذیرند. یعني $F_1 \leq_{c1} F_2$ از اینجا نتیجه مي‌شود که Δ تابعي یکنواست و ازتعریف $F_1 \leq_1^{**} F_2$ واضح است که Δ نمي‌تواند نزولي باشد بنابراین صعودي است، پس این رابطه درست است.

نتیجه ۴-۱: اگر $\mathcal{F}$ یک مدل از توزیعهاي مکاني– مقیاس باشد، آنگاه $\leq_1^{**}$ رابطه‌اي انتقالي است و هر دو توزیع از $\mathcal{F}$ نسبت به رابطه $\leq_1^{**}$ مقایسه پذیرند.

حال دو نوع مرتب سازي دیگر از نوع (۱-۱) را که اهمیت زیادي دارند، معرفي مي کنیم. مجموعه توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$S_1 = \{ u : \text{صعودي و محدب } u \},$$

$$S_2 = \{ u : \text{محدب } u \}$$

به کمک قضیه ۳-۱ و به طور مشابه مي‌توان نشان داد که

$$F_1 \leq_{c1} F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_o F_2 \Rightarrow F_1 \leq_{s1} F_2 \qquad (۳-۴)$$

حال فرض کنیم $\mathcal{F}$ مجموعه انتخاب شده و $\leq$ رابطه مرتب‌سازي مقیاس براي $\mathcal{F}$ باشد، اندازه مقیاس را چنین تعریف مي‌کنیم.

تعریف۴-۴: تابع $\psi : \mathcal{F} \to R$ یک اندازه مقیاس است هرگاه

الف) براي هر $F \in \mathcal{F}$ و $a,b \in R$ داشته باشیم:

$$\psi(a\times F + b) = |a|\psi(F_1)$$

ب) اگر $F_1 , F_2 \in \mathcal{F}$ و $F_1 \leq F_2$ آنگاه:

$$\psi(F_1) \leq \psi(F_2)$$

قضیه زیربه این سوال پاسخ مي‌دهد که چگونه مي‌توان یک اندازه مقیاس براي زماني که از $\leq^*_1$ استفاده مي‌کنیم یافت.

قضیه۴-۳: فرض کنیم F_2 و F_1 توزیعهاي Y و X با امید متناهي μ_{F_2} و μ_{F_1} باشد آنگاه

$$F_1 \leq^*_1 F_2 \Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F_1}) \leq s_1 F_2(\circ+\mu_{F_2})$$

$$\Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F_1}) \leq s_2 F_2(\circ+\mu_{F_2})$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

برهان: فرض کنیم X داراي توزیع F_1 و Y داراي توزیع F_2 باشد به طوري که $F_1 \leq^*_1 F_2$. پس x_oي هست که براي $x > (<) x_o$ داریم:

$$F_1(x + \mu_{F_1}) \leq (\geq) F_2(x + \mu_{F_2})$$

با توجه به شکل ۳-۱ اگر $t \geq x_o$ آنگاه

$$E\max(X - \mu_{F_1}, t) \leq E\max(Y - \mu_{F_1}, t)$$

و وقتي $t < x_o$ داریم:

$$E\max(X - \mu_{F_1}, t) = t - E\max(X - \mu_{F_1}, t) \leq t - E\max(Y - \mu_{F_1}, t) = E\max(Y - \mu_{F_1}, t)$$

$$\Rightarrow F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_{c1} F_2(\circ + \mu_{F_2})$$

حال از رابطه(۴-۳) نتیجه مي‌شود $F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_{s1} F_2(\circ + \mu_{F_2})$ نهایتا رابطه $F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_{s1} F_2(\circ + \mu_{F_2})$ از «استویان[1]» (۱۹۷۲) نتیجه مي شود.

نتیجه ۴-۲: انحراف معیار $\sigma_F = [\int (x-\mu_F)^2 dF(x)]^{\frac{1}{2}}$ اندازه مقیاس براي $\leq^*_1$ مي‌باشد. به راحتي مي‌توان دید که شرط اول صادق است. شرط دوم نیز از قضیه قبل نتیجه مي‌شود. اگر Ƒ را مدل مورد نظر با رابطه $\leq^*_1$ در نظر بگیریم آنگاه به ازاي هر $F_1, F_2 \in$ Ƒ داریم $F_1 \leq^*_1 F_2$ یا $F_2 \leq^*_1 F_1$. فرض کنیم $F_1 \leq^*_1 F_2$ آنگاه:

$$F_1 \leq^*_1 F_2 \Rightarrow F_1(\circ + \mu_{F1}) \leq_{s1} F_2(\circ + \mu_{F2})$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{F1} = E(X - \mu_{F2})^2 \leq E(Y - \mu_{F2})^2 = \sigma^2_{F2} \qquad (۴-۴)$$

$$\Rightarrow \sigma_{F1} \leq \sigma_{F2}$$

از رابطه (۴-۴) و قضیه ٤-۲ نتیجه مي‌شود که انحراف معیار یك اندازه مقیاس براي مرتب‌سازي پراکندگي (یعني $\leq_1$) نیز مي‌باشد.

بالاخره مطلب قابل اشاره دیگر این است که تابع $\sigma_1(F) = e^{H(F)}$ نیز یك اندازه مقیاس براي مدل $\mathscr{F}$ با مرتب‌سازي پراکندگي $\leq_1$ مي‌باشد. زیرا:

اولاً، اگر X داراي توزیع F باشد، آنگاه

$$\forall a,b \in R, F \in Ƒ \quad \sigma_1(a \times F + b) = e^{H(aX + b)} = e^{[\log|a| + H(X)]} = e^{\log|a|} e^{H(X)} = |a|\sigma_1(F)$$

و ثانیا با فرض F_1 ، $F_2 \in$ Ƒ و $F_1 \leq_1 F_2$ داریم:

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow \text{صعودي } \Delta(x) \Leftrightarrow r(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(F_1^{-1}(u))}{f_2(F_1^{-1}(u))} \geq 1$$

$$f_1(F_1^{-1}(u)) \geq f_2(F_2^{-1}(u)) \Leftrightarrow \log f_1(F_1^{-1}(u)) \geq \log f_2(F_2^{-1}(u))$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u)du \leq -\int_0^1 \log f_2(F_2^{-1}(u)du$$

۱-Stoyan

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

$$\Leftrightarrow -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x)dF_1(x) \le -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_2(x)dF_2(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad H(F_1) \le H(F_2) \Leftrightarrow \sigma_1(F_1) \le \sigma_1(F_2)$$

تشکر و قدرداني

در پایان به جاست از آقاي دکتر احسان‌اله صوفي استاد دانشگاه ویسکانسین میلواکي آمریکا به خاطر ارسال تعدادي از مقالات که بسیار مفید و با ارزش بودند سپاسگذاري کنیم.

مراجع

1. P.j. Bickel and E.L. Lehmann, Descriptive Statistics for Nonparametric Models. III. Dispersion, Ann. Statist, Spread, Manuscript, 4 (1976) 1139-1159; IV.
2. E. Ebrahimi, E. Maasoumi, E.S. Soofi, Ordering univareate distributions by entropy and variance. Journal of Econometrics 90 (1999) 317-336.
3. H.on Oja, Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions, Scand. J. Sataist, 8 (1981)154-168.
4. M. Shaked, J.G. Shantikumar, Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, New York(1994).
5. D. Stoyan, Uber Einige Eigenschafton Monoton Stochastischer Prozesse Math, Nachr, 52 (1972) 21-034.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]