بررسی روش برگمن مجزا در حل مسئله کنترل بهینه با قید مشتقات بیضوی

محمود لطفی هنیاندری*، سید محمد حسینی؛
دانشگاه تربیت مدرس، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی و آمار

چکیده

در چند دههٔ اخیر به حل مسائل کنترل بهینه با قید مشتقات جزئی به‌طور وسیعی توجه شده است. این نوع مسائل بسیار پیچیده است و حل عددی آن‌ها اهمیت ویژه‌ای دارد. در این مقاله به حل مسئلهٔ کنترل بهینه با قید مشتقات بیضوی می‌پردازیم. ابتدا با استفاده از روش اجزای محدود شکل گسستهٔ مسئله را به‌دست می‌آوریم، مسئلهٔ گسسته به‌دست آمده مسئلهٔ بهینه‌سازی مقید در ابعاد بزرگ است. حل این مسئلهٔ بهینه‌سازی با روش‌های معمول دشوار و نیازمند زمان و حافظهٔ کامپیوتری زیادی است. اما روش برگمن مجزا با تبدیل مسئله مقید به مسئله‌ای نامقید در همان بعد در زمان و حافظهٔ لازم صرفه‌جویی می‌کند. این مسئله را با روش تکراری برگمن مجزا حل می‌کنیم و در مثال‌هایی که می‌آوریم سرعت و دقت روش تکراری برگمن مجزا را در حل این نوع از مسائل نشان می‌دهیم. همچنین از روش SQP برای حل مسئله و مقایسه با روش برگمن مجزا استفاده کرده‌ایم.

مقدمه

در این مقاله کاربرد روش تکراری برگمن مجزا را در حل مسئلهٔ کنترل بهینه با قید مشتقات بیضوی بررسی می‌کنیم. مسئلهٔ کنترل بهینه محدب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\min_{u\in K} \quad \{g(y)+h(u)\}, \\ &-div(A\nabla y) = f + Bu, \qquad \text{in } \Omega, \\ &y|_{\partial\Omega}=0 \end{aligned} \tag{1}$$

g و h توابعی محدب داده شده، K مجموعه‌ای محدب و بسته و B عمل‌گر خطی پیوسته است. مسئلهٔ (۱) در مسائل بهینه ملایم[1] ظاهر می‌شود [1]. تقریب اجزای محدود یکی از مهم‌ترین روش‌های عددی برای حل این مسائل است و بررسی‌های گسترده‌ای روی آن انجام شده است [۲]-[۹]. در این‌جا از روش اجزای محدود برای گسسته‌سازی مسئلهٔ (۱) استفاده می‌کنیم. مسئله گسسته به‌دست آمده بدین‌صورت است [۱۰]:

$$\begin{aligned} &\min \quad g(Y)+h(U) \\ &s.t. \quad AY = BU + F \end{aligned} \tag{2}$$

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه با قید مشتقات بیضوی؛ روش اجزای محدود؛ روش برگمن مجزا
دریافت ۹۱/۸/۲۷ پذیرش ۹۲/۱۲/۱۲
*نویسنده مسئول mahmod.lotfi@modares.ac.ir

۱. temperate

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

که در آن $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس‌هایی تنک[1] و $F \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ برداری معلوم است. در روش اجزای محدود هرچه تعداد نقاط گره‌ای بیش‌تر باشد جواب به‌دست آمده دقیق‌تر است، پس برای به‌دست آوردن دقت کافی، لازم است که تعداد نقاط گره‌ای تا حد امکان زیاد انتخاب شود و این باعث می‌شود که مسئلهٔ (۲) مسئله‌ای در ابعاد بزرگ باشد. برای حل مسئلهٔ (۲) روش‌های بهینه‌سازی زیادی وجود دارد [۱۱]، [۱۲]. در این مقاله ما از روش برگمن مجزا که گلدستین[2] و اوشر[3] در [۱۳] ارائه کرده‌اند، برای حل مسئلهٔ (۲) استفاده می‌کنیم. ویژگی‌های روش تکراری برگمن مجزا باعث می‌شود که این روش نسبت به‌روش‌های معمول بهینه‌سازی سریع‌تر باشد و حافظهٔ کامپیوتری کم‌تری نیاز داشته باشد. مثال‌های عددی که در ادامه خواهد آمد به‌وضوح این ویژگی را نشان می‌دهد. در واقع روش تکراری برگمن مجزا با تبدیل مسئله بهینه‌سازی مقید به مسئلهٔ نامقید، امکان استفاده از روش‌های بهینه‌سازی نامقید را ممکن می‌سازد و واضح است که حل مسئله نامقید به‌مراتب از حل مسئلهٔ مقید در همان بعد ساده‌تر است.

مسئلهٔ کنترل بهینه با قید مشتقات بیضوی و تقریب اجزای محدود

فرض کنید Ω و Ω_u دومجموعهٔ باز کران‌دار در $\mathbb{R}^n (n \le 3)$ با مرزهای لیپ‌شیتس، $\partial\Omega$ و $\partial\Omega_U$ باشند. $C^0(\bar{\Omega})$ را فضای توابع پیوسته روی $\bar{\Omega}$ تعریف می‌کنیم. فضای سوبولف روی Ω، $W^{m,q}(\Omega)$ را با نرم $\|\phi\|^q_{m,q,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha \phi\|^q_{L^q(\Omega)}$ و شبه‌نرم $|\phi|^q_{m,q,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \phi\|^q_{L^q(\Omega)}$ در نظر می‌گیریم [۱۴].

برای $q=2$، $W^{m,2}(\Omega)$ را با $H^m(\Omega)$ و نرم $\|\cdot\|_{m,\Omega} = \|\cdot\|_{m,2,\Omega}$ و شبه‌نرم $|\cdot|_{m,\Omega} = |\cdot|_{m,2,\Omega}$ نشان می‌دهیم. مجموعه $H_0^1(\Omega)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$H_0^1 = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

فضای حالت را $Y = H_0^1(\Omega)$ و فضای کنترل را به‌صورت $U = L^2(\Omega_U)$ با ضرب داخلی $(.,.)_U$ و $H = L^2(\Omega)$ را با ضرب داخلی $(.,.)$ تعریف می‌کنیم. در ادامه تقریب اجزای محدود را برای مسئلهٔ کنترل بهینه محدب توزیعی (۱) به‌دست می‌آوریم. فرض کنید g و h توابعی محدب باشند که به‌ترتیب روی $H = L^2(\Omega)$ و $U = L^2(\Omega_U)$ مشتق‌پذیر پیوسته باشند. فرض کنید K مجموعه‌ای محدب و بسته در فضای کنترل U، $f \in L^2(\Omega)$ و B عمل‌گری خطی و پیوسته از U به $H \subset Y'$ (Y' فضای دوگان Y) باشد و $A(.) = (a_{i,j}(.))_{n\times n} \in (L^\infty(\Omega))^{n\times n}$. به‌طوری که ثابت $c > 0$ چنان وجود داشته باشد که برای هر بردار $\xi \in R^n$ داشته باشیم: $(A\xi).\xi \ge c|\xi|^2$.

فرض می‌کنیم که اگر $\|u\|_{2,\Omega_U} \to \infty$ آن‌گاه $h(u) \to +\infty$ و تابع $g(.)$ کران‌دار است و برای ثابت $C > 0$ داریم:

$$|(g'(v) - g'(w), q)| \le C \|v - w\|_{1,\Omega} \|q\|_{1,\Omega} \qquad \forall v, w, q \in Y$$

با در نظر گرفتن روش اجزای محدود برای مسئله کنترل بهینه فوق شکل ضعیف مسئله بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

۱.Sparse ۲. Goldstein ۳. Osher

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

$$\begin{aligned} &\min \ \{g(y)+h(u)\} \\ &s.t. \quad a(y,w)=(f+Bu,w) \qquad \forall w\in Y=H_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن :

$$a(v,w)=\int_\Omega (A\nabla v).\nabla w \qquad \forall v,w\in H^1(\Omega)$$
$$(f,w)=\int_\Omega fw \qquad \forall f,w\in L^2(\Omega)$$

با این فرض‌ها مسئلهٔ کنترل (۳) دارای جواب یکتای (y,u) است و جفت (y,u) جواب (۳) است، اگر و تنها اگر متغیر متغیر کمک حالت[۱] $p\in Y$ چنان وجود داشته باشد که سه‌تایی (y,p,u) در این شرایط بهینگی صدق کنند [۱۵]:

$$\begin{aligned} &a(y,w)=(f+Bu,w) \quad \forall w\in Y=H_0^1(\Omega), \\ &a(p,q)=(g'(y),q) \quad \forall q\in Y=H_0^1(\Omega), \\ &(h'(u)+B^*p,v-u)_U\geq 0 \quad \forall v\in K=L^2(\Omega_U) \end{aligned}$$

B^* عمل‌گر الحاقی B و g' و h' به‌ترتیب مشتقات g و h هستند. برای سادگی تنها n- سیمپلکس‌ها را مطابق المان‌های لاگرانژ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم Ω و Ω_u چندوجهی هستند. فرض کنید T^h تقسیم Ω به n- سیمپلکس باز منظم مجزای τ باشد که $\bar{\Omega}=\bigcup_{\tau\in T^h}\bar{\tau}$. هر جزء حداکثر یک لبه روی مرز $\partial\Omega$ دارد، و اجزای مجاور τ و τ' یا تنها یک راس مشترک دارند یا کل لبهٔ τ و τ' عضو T^h است. h_T را قطر جزء τ در T^h می‌گیریم، مطابق با T^h زیر فضای با بعد متناهی S^h از $C^0(\bar{\Omega})$ که $v_h|_\tau$ چند جمله‌ای از درجهٔ k $(k\geq 1)$ است (برای هر $v_h\in S^h$ و $\tau\in T^h$)، را تعریف می‌کنیم. $\{P_i\}(i=1,2,...,J)$ را مجموعه راس‌های T^h در نظر می‌گیریم. فرض کنید $Y^h=V_0^h:=S^h\cap Y$. به‌طور مشابه تقسیم‌بندی منظمی برای Ω_u داریم و $T_U^h,\tau_U,h_{\tau U}$ و P_i^U $(i=1,2,...,J_U)$ را تعریف می‌کنیم. مطابق با T_U^h زیرفضای با بعد متناهی دیگر W_U^h از $L^2(\Omega_U)$ را داریم که $u_h|_{\tau_U}$ چند جمله‌ای از درجه k $(k\geq 0)$ است (برای هر $v_h\in W_U^h$ و $\tau_U\in T_U^h$).در این‌جا شرایط پیوستگی یا مرزی نیاز نیست. فرض کنید $U^h=W_U^h\subset U=L^2(\Omega_U)$. پس روش اجزای محدود برای (۳) بدین‌صورت است:

$$\begin{aligned} &\min_{u_h\in K^h}\{g(y_h)+h(u_h)\}, \\ &a(y_h,u_h)=(f+Bu_h,w_h) \qquad \forall w_h\in Y^h \end{aligned} \tag{۵}$$

در این‌جا K^h مجموعهٔ محدب بسته‌ای در U^h است به‌طوری‌که $v_h\in K^h$ وجود دارد که همگرا به جزء $v\in K$ در U است. پس مسئلهٔ کنترل بهینه (۵) دارای جواب یکتای (y_h,u_h) است و جفت $(y_h,u_h)\in Y^h\times U^h$ جواب (۵) است اگر و تنها اگر متغیر کمک حالت، $p_h\in Y^h$ وجود داشته باشد که سه‌تایی (y_h,p_h,u_h) در این شرایط بهینگی صدق کنند:

$$\begin{aligned} &a(y_h,w_h)=(f+Bu_h,w_h) \quad \forall w_h\in Y^h\subset Y=H_0^1(\Omega), \\ &a(p_h,q_h)=(g'(y_h),q_h) \quad \forall q_h\in Y^h\subset Y=H_0^1(\Omega), \\ &(h'(u_h)+B^*p_h,v_h-u_h)_U\geq 0 \quad \forall v_h\in K^h\subset U=L^2(\Omega_U) \end{aligned} \tag{۶}$$

۱. co-state

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

تقریب اجزای محدود به‌دست آمده در بالا را باید با استفاده از یکی از روش‌های بهینه‌سازی حل کرد. روش‌های مختلفی برای حل این مسئله وجود دارد که ما در این‌جا از روش تکراری برگمن مجزا برای حل آن استفاده می‌کنیم.

روش تکراری برگمن

اولین بار در سال ۱۹۶۷ برگمن[۱] مفهوم تکرار برگمن را برای یافتن اکسترمم توابع محدب به‌کار برد [۱۶]. اوشر و همکارانش این روش را برای حل مسائل پردازش تصویر به‌کار بردند [۱۷]. روش تکراری برگمن برای حل مسئلهٔ basis pursuit $\min_u \{\|u\|_1 : Au = f\}$ به‌طور گسترده‌ای استفاده شده است [۱۸]، [۱۹]، ۲۰]. هم‌چنین کاربرد این روش در حل مسائل تصویربرداری پزشکی بررسی شده است [۲۱]. از این روش در حل مسائل بهینه‌سازی مقید می‌توان استفاده کرد [۱۰]. روش تکراری برگمن بر پایهٔ مفهوم طول برگمن بنا شده است.

تعریف ۱. فرض کنید $E : X \to \mathbb{R}$ تابعی محدب و $u \in X$ باشد. عنصر $p \in X^*$ (X^* فضای دوگان X) را زیرگرادیان E در u می‌نامند، هرگاه برای هر $v \in X$ داشته باشیم:

$$E(v) - E(u) - \langle p, u - v \rangle \geq 0$$

مجموعهٔ همهٔ زیرگرادیان‌های E در u زیرمشتق E در u نامیده می‌شود، و با $\partial E(u)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲. طول برگمن متناظر تابع E در v بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$D_E^p(u,v) = E(u) - E(v) - \langle p, u - v \rangle$$

که p زیرگرادیان E در v است.

طول برگمن تعریف شده در بالا دارای این ویژگی‌های است:

۱. $D_E^p(u,v) \geq 0$

۲. $D_E^p(u,v) = 0$

۳. برای w بین خط واصل u و v داریم: $D_E^p(u,v) \geq D_E^p(w,v)$

حال دو تابع محدب E و F را روی $\mathbb{R}^n$ با شرط $\min_{u \in \mathbb{R}^n} F(u) = 0$ در نظر بگیرید. مسئلهٔ نامقید متناظر به‌صورت $\min_{u \in \mathbb{R}^n} E(u) + \alpha F(u)$ تعریف می‌شود. این مسئله را می‌توان با استفاده از این تکرار حل کرد:

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \min D_E^p(u, u^k) - \alpha F(u) \\ &= \min E(u) - \langle p^k, u - u^k \rangle + \alpha F(u) \end{aligned} \tag{۷}$$

که برگمن پیشنهاد کرده است [۱۶]. برای سادگی می‌توان فرض کرد که F دیفرانسیل‌پذیر است. در این حالت داریم: $0 \in \partial\left(D_E^p(u,u^k) - \alpha F(u)\right)$، که زیردیفرانسیل محاسبه شده در u^{k+1} است. پس $p^{k+1} \in \partial E(u^{k+1})$ و در نتیجه داریم: $p^{k+1} = p^k - \nabla E(u^{k+1})$. در [۱۷] خاصیت همگرایی شکل تکراری برگمن بررسی شده است.

قضیه ۱. فرض کنید E و F توابعی محدب باشند و هم‌چنین F دیفرانسیل‌پذیر باشد. و جواب زیرمسئلهٔ (۷) موجود باشد، آن‌گاه داریم:

۱. L. M. Bregman

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

۱. کاهش یک‌نواخت در F یعنی: $F\left(u^{k+1}\right)\le F\left(u^{k+1}\right)$

۲. همگرایی به مقدار مینیمم F یعنی: $F\left(u^{k}\right)\le F\left(u^{*}\right)+\dfrac{E\left(u^{*}\right)}{k}$

روش تکراری برگمن برای بهینه‌سازی مقید

روش تکراری برگمن را می‌توان برای حل دسته وسیعی از مسائل بهینه‌سازی محدب به‌کار برد. در این بخش این مسئلهٔ مقید را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\min_{u} \quad E(u)\\ &s.t \quad Au=b\end{aligned} \tag{۸}$$

می‌خواهیم مسئلهٔ (۸) را برای عملگر خطی A و بردار b حل کنیم. با استفاده از تابع جریمه مرتبهٔ دو مسئله را به یک مسئلهٔ نامقید تبدیل می‌کنیم:

$$\min \quad E(u)+\frac{\alpha}{2}\left\|Au-b\right\|_2^2 \tag{۹}$$

تکرار روش برگمن برای مسئلهٔ یاد شده چنین است:

$$\begin{aligned}u^{k+1}&=\min_{u} D_E^p\left(u,u^k\right)+\frac{\alpha}{2}\left\|Au-b\right\|_2^2\\ &=\min_{u} E(u)-\left\langle p^k,u-u^k\right\rangle+\frac{\alpha}{2}\left\|Au-b\right\|_2^2\\ p^{k+1}&=p^k-\alpha A^T\left(Au^{k+1}-b\right)\end{aligned} \tag{۱۰}$$

می‌توان نشان داد که اگر A خطی باشد این تکرار ظاهرا پیچیده معادل با این شکل ساده‌تر است [۱۷]:

$$\begin{aligned}u^{k+1}&=\min_{u} E(u)+\frac{\alpha}{2}\left\|Au^k-b\right\|_2^2\\ b^{k+1}&=b^k+b-Au^k\end{aligned} \tag{۱۱}$$

از معادل بودن روابط (۱۰) و (۱۱) و همگرایی قضیه ۱ داریم:

$$\lim_{k\to\infty} Au^k=b$$

حال باید نشان دهیم که جواب u^* به‌دست آمده از معادلهٔ $Au=b$ مسئلهٔ بهینه‌سازی محدب (۸) را حل می‌کند.

قضیه ۲. فرض کنید $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ و $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ خطی باشد. تکرار برگمن (۱۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید برای تکراری u^* در $Au^*=b$ صدق کند، در این صورت $Au^*=b$ جواب مسئلهٔ بهینه‌سازی محدب (۸) است.

اثبات. فرض کنید u^* و b^* چنان باشند که $Au^*=b$ و

$$u^*=\min E(u)+\frac{\alpha}{2}\left\|Au-b^*\right\|_2^2 \tag{۱۲}$$

فرض کنید $\hat{u}$ جواب دقیق (۸) باشد. آن‌گاه $Au^*=b=A\hat{u}$ در این شرط صدق می‌کند:

$$\left\|Au^*-b^*\right\|_2^2=\left\|A\hat{u}-b^*\right\|_2^2 \tag{۱۳}$$

و چون u^* در (۱۲) صدق می‌کند، داریم:

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

$$E\left(u^*\right)+\frac{\alpha}{۲}\left\|Au^*-b^*\right\|_۲^۲ \le E\left(\hat{u}\right)+\frac{\alpha}{۲}\left\|A\hat{u}-b^*\right\|_۲^۲ \qquad (۱۴)$$

از (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود که $E\left(u^*\right)\le E\left(\hat{u}\right)$ و چون $\hat{u}$ در مسئلهٔ اصلی صدق می‌کند، پس این نامساوی را می‌توان به‌صورت تساوی در نظر گرفت و این نشان می‌دهد که u^* جواب است.

مزایای روش برگمن

همگرایی سریع روش برگمن باعث می‌شود که تنها نیاز به حل تعداد کمی مسئلهٔ بهینه‌سازی نامقید داشته باشیم. اما مزیت اصلی این روش این است که مقدار α را در تکرارهای روش می‌توان ثابت در نظر گرفت. به عبارت دیگر مقدار α را می‌توان چنان انتخاب کرد که عدد حالت زیرمسئله کم‌ترین مقدار را داشته باشد [۱۰]. ثابت در نظر گرفتن مقدار α باعث می‌شود که روش بهینه‌سازی به‌کار رفته برای حل زیرمسئلهٔ نامقید سریع‌تر و با صرف حافظهٔ کامپیوتری کم‌تری به جواب برسد.

روش برگمن مجزا

گلدستین و اوشر در [۱۰] روش برگمن مجزا را برای حل مسئله:

$$\min_u \left|\phi(u)\right|+M(u) \qquad (۱۵)$$

که در آن $|.|$ نرم $l_۱$ و $\left|\phi(u)\right|$ و $M(u)$ توابعی محدب هستند، بدین‌صورت استفاده کرده‌اند:

مسئلهٔ (۱۵) را می‌توان بدین‌صورت نیز نوشت:

$$\min_{u,d} |d|+M(u) \qquad s.t \qquad d=\phi(u)$$

برای حل مسئله شکل نامقید آن‌را به دست می‌آوریم:

$$\min_{u,d} |d|+M(u)\frac{\alpha}{۲}\left\|d-\phi(u)\right\|_۲^۲$$

حال اگر قرار دهیم $E(u,d)=|d|+F(u)$ و $A(u,d)=d-\phi(u)$ می‌توان تکرار روش برگمن را بدین‌صورت به کار برد:

$$\begin{aligned}\left(u^{k+۱},d^{k+۱}\right)&=\min_{u,d} D_E^p\left(u,u^k,d,d^k\right)+\frac{\alpha}{۲}\left\|d-\phi(u)\right\|_۲^۲\\&=\min_{u,d} E(u,d)-\left\langle p_u^k,u-u^k\right\rangle-\left\langle p_d^k,d-d^k\right\rangle+\frac{\alpha}{۲}\left\|d-\phi(u)\right\|_۲^۲\\p_u^{k+۱}&=p_u^k-\alpha(\nabla\phi)^T\left(\phi\left(u^{k+۱}\right)-d^{k+۱}\right)\\p_d^{k+۱}&=p_d^k+\alpha\left(d^{k+۱}-\phi\left(u^{k+۱}\right)\right)\end{aligned}$$

که با استفاده از شکل ساده‌تر روش برگمن بدین‌صورت در می‌آید:

$$\begin{aligned}\left(u^{k+۱},d^{k+۱}\right)&=\min_{u,d} |d|+M(u)+\frac{\alpha}{۲}\left\|d-\phi(u)-b^k\right\|_۲^۲\\b^{k+۱}&=b^k+\left(\phi\left(u^{k+۱}\right)-d^{k+۱}\right)\end{aligned} \qquad (۸)$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

برای کاربردی بودن روش، باید مسئلهٔ (۱۶) حل شود که می‌توان با استفاده از این دو گام آن را حل کرد:

$$\text{Step}۱ \quad : \quad u^{k+۱} = \min_u M(u) + \frac{\alpha}{۲}\left\|d^k - \phi(u) - b^k\right\|_۲^۲$$

$$\text{Step}۲ \quad : \quad d^{k+۱} = \min_d |d| + \frac{\alpha}{۲}\left\|d - \phi\left(u^{k+۱}\right) - b^k\right\|_۲^۲$$

سرعت روش برگمن مجزا تا حد زیادی بستگی به سرعت حل این دو مسئله دارد.

حل قسمت بهینه‌سازی مسئلهٔ کنترل بهینه با قید مشتقات بیضوی با استفاده از روش تکراری برگمن مجزا

متغیر حالت y را توزیع دمای جسمی می‌گیریم که روی مرز برابر صفر است. اگر f را یک منبع گرما در نظر بگیریم، آنگاه توزیع دمای y روی جسم به وسیلهٔ معادلات زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} -\Delta y &= f && \text{in}\,\Omega \\ y &= ۰ && \text{on}\,\partial\Omega \end{aligned}$$

توزیع دمای y را با اضافه کردن تابع کنترل u می‌توان چنان کنترل کرد که تا حدامکان بر توزیع دمای مطلوب $y_.$ منطبق شود. برای مینیمم کردن فاصلهٔ دمای واقعی y و دمای مطلوب $y_.$ این مسئله بهینه‌سازی را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\min_{u \in U_{ad}} \quad \frac{۱}{۲}\int_\Omega (y - y_.)^۲ dx + \frac{\nu}{۲}\int_\Omega (u)^۲ dx, \\ &-div(A\nabla y) = f + Bu \qquad \text{in } \Omega \\ &y|_{\partial\Omega} = ۰ \end{aligned} \tag{۱۷}$$

U_{ad} مجموعه‌ای از کنترل‌های مجاز و $\nu \geq 0$ پارامتر وزن است. در تقریب اجزای محدود مسئلهٔ (۱۷) اگر متغیر حالت y را با توابع پایه‌ای Φ^i و متغیر کنترل u را با توابع پایه‌ای Ψ^i تقریب بزنیم شکل گسستهٔ مسئله بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\min \quad \frac{۱}{۲}\left(Y - Y^{۰}\right)^T Q\left(Y - Y^{۰}\right) + \frac{\nu}{۲}U^T QU \\ &s.t \quad AY = BU + F \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که در آن:

$$A(i,j) = \int_\Omega \nabla\Phi_i \nabla\Phi_j dx \qquad B(i,j) = \int_\Omega \Phi_i \Psi_j dx$$

$$Q(i,j) = \int_\Omega \Phi_i \Phi_j dx \qquad M(i,j) = \int_\Omega \Psi_i \Psi_j dx$$

$$F(i) = \int_\Omega f\,\Phi_i dx$$

در مسئلهٔ (۱۸) قرار می‌دهیم:

$$G(Y) = \frac{۱}{۲}\left(Y - Y^{۰}\right)^T Q\left(Y - Y^{۰}\right) \qquad F(U) = \frac{\nu}{۲}U^T QU$$

با این فرض‌ها تکرار روش برگمن برای مسئلهٔ (۱۸) بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

$$\left(Y^{k+1},U^{k+1}\right)=\min G\left(Y\right)-G\left(Y^{k}\right)-\left\langle p_Y^k,Y-Y^k\right\rangle+M\left(U\right)-M\left(U^k\right)-\left\langle p_U^k,U-U^k\right\rangle+\frac{\alpha}{2}\left\|BU+F-AY\right\|_2^2$$
$$p_Y^{k+1}=p_Y^k+\alpha B^T\left(BU^{k+1}+F-AY^{k+1}\right)$$
$$p_U^{k+1}=p_U^k+\alpha A^T\left(BU^{k+1}+F-AY^{k+1}\right)$$

اما با توجه به ویژگی‌های مسئله، تکرار روش برگمن مجزا برای این مسئله مناسب‌تر بدین‌صورت است:

$$Y^{k+1}=\min G\left(Y\right)+\left\langle\lambda^k,-AY\right\rangle+\frac{\alpha}{2}\left\|BU^k+F-AY\right\|_2^2$$
$$U^{k+1}=\min M\left(U\right)+\left\langle\lambda^k,BU\right\rangle+\frac{\alpha}{2}\left\|BU+F-AY^{k+1}\right\|_2^2$$
$$\lambda^{k+1}=\lambda^k+\alpha\left(BU^{k+1}+F-AY^{k+1}\right)$$

سرعت روش برگمن مجزا تا حد بسیار زیادی به سرعت روش انتخاب شده برای حل زیر مسئله‌ها بستگی دارد. برای حل این دو زیرمسئله می‌توان از روش مستقیم و روش‌های حل دستگاه معادلات خطی استفاده کرد.

قضیه همگرایی

لاگرانژین مسئلهٔ اولیه (۱۸) بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$L\left(Y,U,\lambda\right)=G\left(Y\right)+M\left(U\right)+\left\langle\lambda,BU+F-AY\right\rangle$$

λ بردار ضرایب لاگرانژ است. مسئله دوگان مسئلهٔ (۱۸) بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\max\left\{\inf L(Y,U,\lambda)\right\} \qquad (۱۹)$$

جواب بهینه مسئله‌های (۱۸) و (۱۹) معادل با پیدا کردن نقطه زینی L است [۲۲]. به‌عبارت بهتر $\left(Y^*,U^*\right)$ جواب بهینه مسئلهٔ اولیه (۱۸) و جواب بهینه مسئله دوگان (۱۹) است، اگر و تنها اگر:

$$L\left(Y^*,U^*,\lambda\right)\le L\left(Y^*,U^*,\lambda^*\right)\le L\left(Y,U,\lambda^*\right)\qquad \forall Y,U,\lambda$$

قضیه ۳. برای مسئلهٔ (۱۸) فرض کنید Y^0 و λ^0 مقادیری اختیاری باشند و $\alpha>0$. فرض کنید دنباله‌های $\{\mu_k\}$ و $\{\nu_k\}$ چنان باشند که: $\mu_k\ge 0,\ \nu_k\ge 0,\ \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k<\infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}\nu_k<\infty$. و همچنین:

$$\left\|Y^{k+1}-\min G\left(Y\right)+\left\langle\lambda^k,-AY\right\rangle+\frac{\alpha}{2}\left\|BU^k+F-AY\right\|_2^2\right\|\le\mu_k$$
$$\left\|U^{k+1}-\min M\left(U\right)+\left\langle\lambda^k,BU\right\rangle+\frac{\alpha}{2}\left\|BU+F-AY^k\right\|_2^2\right\|\le\nu_k$$
$$\lambda^{k+1}=\lambda^k+\alpha\left(BU^{k+1}+F-AY^{k+1}\right)$$

اگر $L(Y,U,\lambda)$ نقطهٔ زینی داشته باشد، آن‌گاه: $Y^k\to Y^*,U^k\to U^*,\lambda^k\to\lambda^*$. که $\left(Y^*,U^*,\lambda^*\right)$ نقطهٔ زینی است. از طرف دیگر اگر نقطهٔ زینی وجود نداشته باشد حداقل یکی از دنباله‌های $\{\mu_k\}$ یا $\{\nu_k\}$ بی‌کران است.

اثبات. رجوع کنید به [۲۲].

نتایج عددی

شکل کلی مثال‌هایی که در این بخش در نظر می‌گیریم، بدین‌صورت هستند:

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

$$\min \ \frac{1}{2}\int_{\Omega}(y-y_{\cdot})^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}(u)^{2}dx$$
$$s.t \quad -\Delta y = Bu+f, \qquad y|_{\partial\Omega}=0 \qquad (20)$$

در این مثال‌ها قرار می‌دهیم $B=I$ و $\Omega_U=\Omega=[0,1]\times[0,1]$. همچنین شبکه‌بندی متغیر حالت y و متغیر کنترل u را در روش اجزای محدود یک‌سان در نظر گرفته و از اجزای مثلثی استفاده می‌کنیم. از توابع پایه‌ای قطعه‌ای خطی برای تقریب متغیر کنترل و حالت استفاده می‌کنیم. از نرم‌افزار متلب برای برنامه‌نویسی روش‌ها (اجزای محدود و برگمن مجزا) استفاده کرده‌ایم. در روش برگمن مجزا مقدار α را ۱ گرفته و برای حل زیرمسئله‌ها از تابع (\ )[1] در نرم‌افزار متلب که برای حل دستگاه $Ax=b$ به‌صورت $A\backslash b$ به‌کار می‌رود، استفاده کرده‌ایم. شرط توقف روش برگمن مجزا را نیز بدین‌صورت در نظر گرفته‌ایم:

$$\frac{\|BU+F-AY\|}{\|F\|}\le 10^{-6}$$

مثال ۱. در این مثال مسئله (۲۰) را با این شرایط در نظر می‌گیریم:

$$y=\frac{1}{4}\sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2) \qquad y_{\cdot}=y-16\pi^{2}y$$
$$u=-2y \qquad f=8\pi^{2}y+2y$$

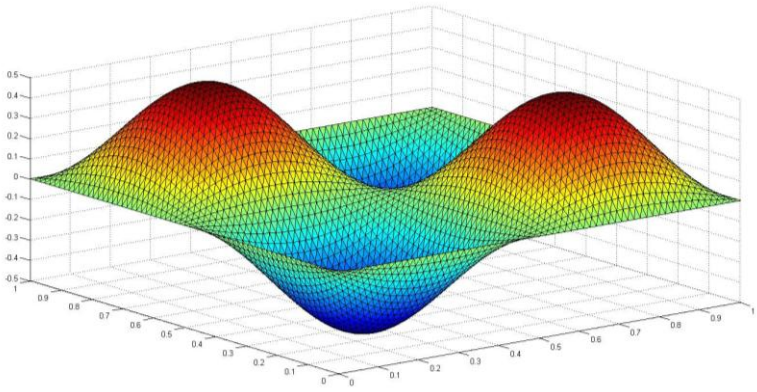
برای این مثال این نتایج را در نرم‌افزار متلب به‌دست آورده‌ایم:

جدول ۱. نتایج به‌دست آمده برای مثال ۱ با گسسته‌سازی اجزای محدود و روش بهینه‌سازی برگمن مجزا

تعداد نقاط گره‌ای	تعداد المان‌ها	$\|u-u_h\|$	$\|y-y_h\|$	Time (s)
۲۸۹	۵۱۲	۰/۰۱۹۳	۰/۰۰۳۲	۰/۰۲۴۴۸۰
۱۰۸۹	۲۰۴۸	۰/۰۰۵۰	۷/۹۹۰۶۳E-۴	۰/۰۳۲۶۸۶۲
۴۲۲۵	۸۱۹۲	۰/۰۰۱۳	۱/۹۷۴۳E-۴	۴/۲۵۹۵۵۱
۱۶۶۴۱	۳۲۷۶۸	۳/۱۴۸7E-۴	۴/۹۳۳۵E-۵	۷۲/۶۵۸۷۷۲

جدول ۲. نتایج به‌دست آمده برای مثال ۱ با گسسته‌سازی اجزای محدود و روش بهینه‌سازی SQP

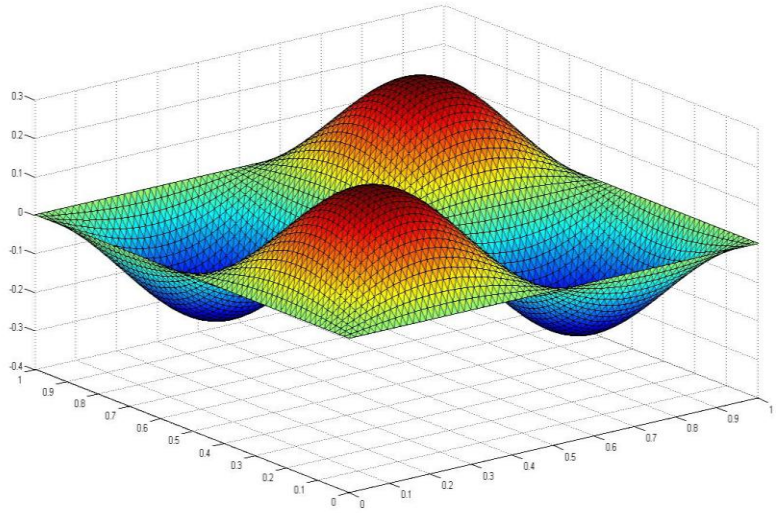
تعداد نقاط گره‌ای	تعداد المان‌ها	$\|u-u_h\|$	$\|y-y_h\|$	Time (s)
۲۸۹	۵۱۲	۰/۰۱۹۳	۰/۰۰۳۲	۱۲/۵۶۰۵۲۰
۱۰۸۹	۲۰۴۸	۰/۰۰۵۸	۷/۸۴۸۸E-۴	۲۴۳/۴۶۹۵۲۲



شکل ۱. تقریب متغیر کنترل مثال ۱ با گسسته‌سازی اجزای محدود و روش بهینه‌سازی برگمن مجزا

۱. backslash

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]



شکل ۲. تقریب متغیر حالت مثال ۱ با گسسته‌سازی اجزای محدود و روش بهینه‌سازی برگمن مجزا

مثال ۲. در این مثال فرض کنید داشته باشیم:

$$u = -\sin(\pi x_1)x_2(x_2-1) \qquad f = 4\pi^2 \sin(2\pi x_1)\left(2\cos(2\pi x_2)-1\right)+\sin(\pi x_1)x_2(x_2-1)$$

$$y = \sin(2\pi x_1)(\cos(2\pi x_2)-1) \qquad y_2 = \sin(\pi x_1)(2-\pi^2 x_2(x_2-1))-1)+\sin(2\pi x_1)(\cos(2\pi x_2)-1)$$

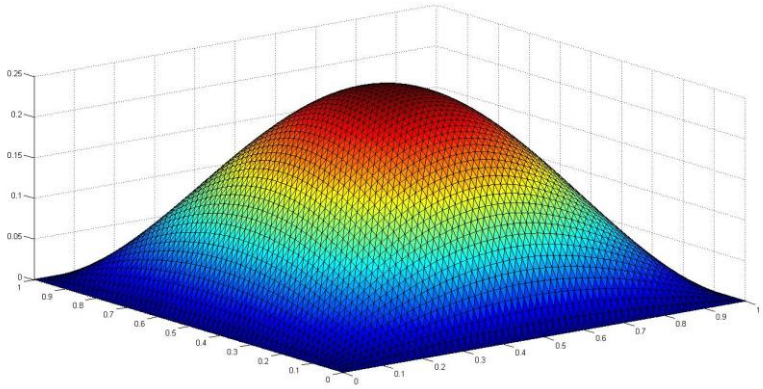
نتایج به‌دست آمده برای این مثال در جدول‌های ۳ و ٤ و همچنین اشکال ۳ و ٤ آمده است.

جدول ۳. نتایج به‌دست آمده برای مثال ۲با گسسته‌سازی اجزای محدود و روش بهینه‌سازی برگمن مجزا

تعداد نقاط گره‌ای	تعداد المان‌ها	$\|u-u_h\|$	$\|y-y_h\|$	Time (s)
۲۸۹	۵۱۲	۰/۰۰۲۷	۰/۰۱٤۰	۰/۰۲۵٤۵٦
۱۰۸۹	۲۰٤۸	٦/۷٦۸٤E-۴	۰/۰۰۳۵	۰/۳۵۵۷۵۰
٤۲۲۵	۸۱۹۲	۱/٦۹۹۵E-۴	۸/۷۷۹٤E-۴	٦/۱٤٦۷۲٤
۱٦٦٤۱	۳۲۷٦۸	۴/۲۶۳۵E-۴	۲/۱۹٤۹E-۵	۱۲۳/۵۲۱۳۲۳

جدول ۴. نتایج به‌دست آمده برای مثال ۲ با گسسته‌سازی اجزای محدود و روش بهینه‌سازی SQP

تعداد نقاط گره‌ای	تعداد المان‌ها	$\|u-u_h\|$	$\|y-y_h\|$	Time (s)
۲۸۹	۵۱۲	۰/۰۰۲۷	۰/۰۱٤۰	۲/٦۲٤۵۳۱
۱۰۸۹	۲۰٤۸	۷/٦۷٦۲ E-٤	۰/۰۰۳۵	٤٤/۵٦۳٦۳٤



شکل ٤. تقریب متغیر کنترل مثال ۲ با گسسته‌سازی اجزای محدود و روش بهینه‌سازی برگمن مجزا

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

بحث و نتیجه‌گیری

نتایج عددی به‌دست آمده برای مثال‌های فوق به‌وضوع سرعت و دقت روش برگمن مجزا را در حل این نوع از مسائل نشان می‌دهد. در واقع روش برگمن مجزا با تبدیل مسئلهٔ بهینه‌سازی مقید در ابعاد بزرگ، به مسئلهٔ بهینه‌سازی نامقید در همان بعد باعث می‌شود که بتوانیم از روش‌های بهینه‌سازی نامقید استفاده کنیم. در این‌جا شرایط مسئله به‌گونه‌ای است که برای حل زیرمسئله‌های نامقید می‌توان مستقیماً و با مشتق گرفتن نسبت به متغیر، جواب را به‌دست آورد. در مثال ۱ با ۱۰۸۹ نقطهٔ گره‌ای زمانی که روش SQP برای اجرای برنامه نیاز دارد (۲۴۳/۴۶۹۵۲۲ ثانیه) تقریباً ۷۴۴۸ برابر زمانی است که روش برگمن مجزا (۰/۰۳۲۶۸۶۲ ثانیه) برای رسیدن به تقریبی با همان خطا لازم دارد. این مقدار در مثال ۲ تقریبا ۵۳۷ برابر است.

منابع

1. G. Duvaut, J. L. Lions, "The Inequalities in Mechanics and Physics", Springer, Berlin (1973).
2. W. Alt, "On the approximation of infinite optimization problems with an application to optimal control problems", Appl. Math. Optim. 12 (1984) 15-27.
3. D. A. French, J. T. King, "Approximation of an elliptic control problem by the finite element method", Numer. Funct. Anal. Optim. 12 (1991) 299-315.
4. J. Haslinger, P. Neittaanmaki, "Finite Element Approximation for Optimal Shape Design", Wiley, Chichester (1989).
5. D. Tiba, "Lectures on the Optimal Control of Elliptic Equations University of Jyvaskyla Press", Jyvaskyla (1995).
6. F. S. Falk, "Approximation of a class of optimal control problems with order of convergence estimates", J. Math. Anal. Appl., 44 (1973) 28-48.
7. D. A. French, J. T. King, "Approximation of an elliptic control problem by the finite element method", Numer. Funct. Anal. Optim., 12 (1991) 299-314.
8. T. Geveci, "On the approximation of the solution of an optimal control problem governed by an elliptic equation", RAIRO Anal. Num´er., 13 (1979) 313-328.
9. K. Malanowski, "Convergence of approximations vs. regularity of solutions for convex, control constrained", optimal control systems, Appl. Math. Optim., 8 (1982) 69-95.
10. R. Li, W. Liu, H. Ma, T. Tang, "Adaptive finite element approximation for distributed elliptic optimal control problems", SIAM J. Control Optim., 5 (2002) 1321-1349.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

11. S. B. Hazra, "Large-Scale PDE-Constrained Optimization in Applications", Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2010).

12. M. Hinze, "Optimal and Instantaneous Control of the Instationary Navier-Stokes Equations", Habilitation thesis, Technische Universitat Berlin, Berlin, Germany (2000).

13. T. Goldstein, S. Osher, "The split Bregman method for L1-regularized problems", SIAM J. Imaging Sci., 2(2), (2009) 323-343.

14. Y. Chen, Y. Dai, "Superconvergence for optimal control problems governed by semi-linear elliptic equations", J. Sci. Comput., 39 (2009) 206-221.

15. J. L. Lions, "Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations", Springer-Verlag, Berlin (1971).

16. L. M. Bregman, "The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming", USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 7(3) (1967) 200-217.

17. S. Osher, M. Burger, D. Goldfarb, J. Xu, W. Yin, "An iterative regularization method for total variation-based image restoration", MMS, (2005) 460-489.

18. S. Osher, Y. Mao, B. Dong, W. Yin, "Fast linearized Bregman iterations for compressed sensing and sparse denoising", UCLA CAM Report, 08-37.

19. J. F. Cai, S. Osher, Z Shen, "Linearized Bregman iterations for compressed sensing", UCLA CAM Report, 08-06.

20. W. Yin, S. Osher, D. Goldfarb, J. Darbon, "Bregman iterative algorithms for l1-minimization with applications to compressed sensing", Siam J. Imaging Science (2008) 142-168.

21. L. He, T. Chiun Chang, S. Osher, "Mr image reconstruction from sparse radial samples by using iterative refinement procedures", Proceedings of the 13th annual meeting of ISMRM (2006).

22. E. Esser, "Applications of Lagrangian-based alternating direction methods and connections to split Bregman", UCLA CAM Report (2009) 09-31.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]