بازه‌های پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری در سری‌های زمانی

نصراله ایران‌پناه، پریسا میکلانی؛ دانشگاه اصفهان

دریافت ۹۱/۸/۲۹ پذیرش ۹۲/۱۱/۱

چکیده

یکی از مسائل مهم در تحلیل سری‌های زمانی برآورد بازهٔ پیش‌گویی آینده بر اساس مشاهدات گذشته است. در سال‌های اخیر، روش‌های مختلف بوت‌استرپ برای برآورد بازه‌های پیش‌گویی بدون هیچ فرضی در بارهٔ توزیع خطاها، ارائه شده است. روش‌های بوت‌استرپ نیم پارامتری بر اساس برازش یک مدل اتورگرسیو بر روی داده‌ها است و نمونه‌های بوت‌استرپ با استفاده از بازنمونه‌گیری از باقی‌مانده‌ها تولید می‌شود. در این مقاله در ابتدا، روش‌های بوت‌استرپ نیم پارامتری ارائه می‌شوند. سپس در پژوهشی شبیه‌سازی بازه‌های پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با بازهٔ پیش‌گویی استاندارد مقایسه می‌شوند. در نهایت روش‌های ارائه شده برای برآورد بازه‌های پیش‌گویی آینده داده‌های سری زمانی دمای هوای اصفهان به‌کار می‌روند.

واژه‌های کلیدی: سری زمانی ARMA، بازه‌های پیش‌گویی، بوت استرپ نیم‌پارامتری، شبیه‌سازی مونت کارلو.

مقدمه

افرون روش بازنمونه‌گیری بوت‌استرپ را برای برآورد اندازه‌های دقت آماره‌ها در داده‌های مستقل ارائه داد [۹]. در تحلیل سری‌های زمانی به‌دلیل وجود ساختار وابستگی بین داده‌ها نمی‌توان از روش بوت‌استرپ برای داده‌های مستقل استفاده کرد. برای این منظور، بولمان روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری را بر اساس بازنمونه‌گیری از باقی‌مانده‌های مدل و بدون نیاز به فرض معلوم بودن توزیع باقی‌مانده‌ها ارائه کرد [۷]. کائو و همکاران روش بوت‌استرپ شرطی را برای سری زمانی اتورگرسیو (AR) ارائه کردند [۸]. پاسکال و همکاران روش بوت-استرپ شرطی کائو و همکاران را برای سری زمانی میانگین متحرک جمع بسته اتورگرسیو آریما[1] تعمیم دادند [۱۲].

در همهٔ این روش‌ها فرض معلوم بودن مرتبه اتورگرسیو (p) برقرار است. آلونسو و همکاران خواص مجانبی پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری را برای رده‌ای از سری‌های زمانی، به‌صورت $AR(\infty)$ ارائه کردند [۱]، [۲]. آن‌ها در پژوهشی شبیه‌سازی بازه‌های پیش‌گویی صدکی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری را با روش استاندارد گاوسی و روش ارائه شده در پاسکال و همکاران مقایسه کردند [۱۲]. آلونسو و همکاران روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبه درونی را ارائه دادند [۳].

---

*نویسنده مسئول iranpanah@sci.ui.ac.ir

1. Arima

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

در این مقاله، ابتدا مراحل مختلف روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری در دو حالت شرطی و غیرشرطی، بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبهٔ درونی و روش ارائه شدهٔ پاسکال و همکاران برای محاسبهٔ بازه‌های پیش‌گویی صدکی بوت‌استرپ مشاهدات آینده ارائه می‌شود [۱۲]. سپس خواص مجانبی پیش‌گویی به‌روش بوت‌استرپ نیم-پارامتری بررسی می‌شود. در ادامه شبیه‌سازی روش‌های پیش‌گویی ارائه شده با هم مقایسه می‌شوند و در انتها بازه‌های پیش‌گویی بوت‌استرپ برای سری زمانی داده‌های میانگین سالانه دمای هوای اصفهان محاسبه می‌شود. برنامه‌های مورد نیاز برای بررسی شبیه‌سازی و همچنین تحلیل داده‌های واقعی با استفاده از نرم‌افزار آماری R انجام شده است.

بازهٔ پیش‌گویی بوت‌استرپ

فرض کنید $\{X_t\}_{t\in z}$ فرآیند مانای میانگین متحرک به‌صورت $X_t-\mu_x=\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j\varepsilon_{t-j}$ باشد، که در آن $\phi_0=1, \{\varepsilon_t\}_{t\in z}$ i.i.d, $E[\varepsilon_t]=0, V[\varepsilon_t]=\sigma^2, E[\varepsilon_t]=\mu_x$ با فرض معکوس‌پذیری می‌توان این فرآیند را به‌صورت فرآیند اتورگرسیو $\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(X_{t-j}-\mu_x)=\varepsilon_t$ نشان داد که در آن $\varphi_0=1$ $\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j^2<\infty,$ است.

مراحل مختلف الگوریتم محاسبهٔ بازهٔ پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری براساس نمونهٔ مشاهده شده سری زمانی $x_1,\dots,x_n$ بر اساس روش‌های بوت‌استرپ نیم‌پارامتری (SB) در آلونسو و همکاران [۱]، [۲]، بازهٔ پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری شرطی (CSB) آلونسو و همکاران [۱]، [۲] و بازه پیش‌گویی به روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبهٔ درونی (SEOB) در آلونسو و همکاران [۳] بدین‌صورت است:

۱. بر اساس معیار AICC به‌صورت $AICC=n\log(\sigma^2)+2(p+1)n/(n-p-2)$ که تصحیح اریبی شده معیار AIC است، ابتدا بر اساس کم‌ترین مقدار AICC در بین مدل های مختلف، مرتبهٔ مدل اتورگرسیو برآورد می‌گردد.

۲. با استفاده از معادلات یول والکر به‌صورت

$$\begin{cases}\rho_1=\varphi_1 \qquad \varphi_2\rho_1+\dots+\varphi_p\rho_{p-1}\\ \rho_2=\varphi_1\rho_1+\varphi_2+\dots+\varphi_p\rho_{p-2}\\ \qquad\vdots\\ \rho_p=\varphi_1\rho_{p-1}+\varphi_2\rho_{p-2}+\dots+\varphi_p\end{cases}$$

که در آن γ_k، کوواریانس بین مقادیر $X_t-\mu_x$ و $X_{t-k}-\mu_x$ از سری زمانی است که با k تأخیر زمانی از هم جدا شدند و اتوکوواریانس با تأخیر k نامیده می‌شود و به‌همین ترتیب $\rho_k=\frac{\gamma_k}{\sigma^2}$، خود همبستگی با تأخیر k است. پارامترهای مدل اتورگرسیو $\varphi_p=(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_p)'$ به‌صورت $\varphi=p_p^{-1}\rho_p=r_p^{-1}y_p$ برآورد می‌شوند که در آن

$$\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_p\end{bmatrix} \text{ و } \rho_p=\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \vdots\\ \rho_p\end{bmatrix}, \gamma_p=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_p\end{bmatrix}.$$

۳. باقی‌مانده‌های مدل به‌صورت $\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{p}\varphi_j(x_{t-j}-\bar{x}), \varphi_0=1, t\in(p+1,\dots,n)$ برآورد می‌شوند.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

٤. برآورد باقی‌مانده‌های مدل به‌صورت $\varepsilon = \varepsilon_t - \varepsilon^{(\cdot)}$ که در آن $\varepsilon^{(\cdot)} = (n-p)^{-1}\sum_{t=p+1}^{n}\varepsilon_t$ است مرکزی می گردند.

٥. باقی‌مانده‌های بوت‌استرپ $\varepsilon_{p+1}^*,\dots,\varepsilon_n^*$ به‌روش نمونه‌گیری تصادفی ساده باجای‌گذاری از $\varepsilon_{p+1},\dots,\varepsilon_n$ تولید می‌شوند.

٦. نمونهٔ بوت‌استرپ $x_1^*,\dots,x_n^*$ به‌ازای $t>p$ از رابطهٔ $\sum_{j=0}^{p}\varphi_j(X_{t-j}^*-\bar{x})=\varepsilon_t^*$ و براساس $\varepsilon_{p+1}^*,\dots,\varepsilon_n^*$ به‌دست آمده در مرحلهٔ ٥ و به‌ازای $t\le p$ به‌صورت $x_t^*=\bar{x}$ به‌دست می‌آیند. که در آن $x_1^*,\dots,x_p^*$ برابر با $\bar{x}$ است (برای به‌دست آوردن نمونهٔ بوت‌استرپ مناسب بر اساس مدل مورد نظر، ابتدا n+۱۰۰ نمونه تولید و سپس ۱۰۰ نمونهٔ اول حذف می‌گردد).

.۷

۷-۱. در روش (CSB) بر اساس پارامترهای برآورد شده $\boldsymbol{\varphi}_p=(\varphi_1,\dots,\varphi_p)'$ در مرحلهٔ (۲)، پیش‌گویی h گام آینده به‌صورت $X_{n+h}^*-\bar{x}=\sum_{j=1}^{p}\varphi_j(X_{n+h-j}^*-\bar{x})+\varepsilon_{n+h}^*$ محاسبه می‌شود، که در آن برای $n+h-j\le n$، $X_{n+h-j}^*=x_{n+h-j}^*$.

۷-۲. در روش (SB) با استفاده از نمونهٔ بوت‌استرپ $X_1^*,\dots,X_n^*$ مرحلهٔ (٦) و با تکرار مشابه مرحلهٔ (۲)، پارامترهای مدل به‌صورت $\boldsymbol{\varphi}_p^*=(\varphi_1^*,\dots,\varphi_p^*)'$ برآورد می‌گردند. پیش‌گویی h گام آینده به‌صورت $X_{n+h}^*-\bar{x}=\sum_{j=1}^{p}\varphi_j(X_{n+h-j}^*-\bar{x})+\varepsilon_{n+h}^*$ محاسبه می‌گردند، که در آن برای $n+h-j\le n$، $X_{n+h-j}^*=x_{n+h-j}^*$.

۷-۳. در روش (SEOB) با استفاده از نمونهٔ بوت‌استرپ $X_1^*,\dots,X_n^*$ و با تکرار مراحل (۱) و (۲)، مرتبهٔ سری زمانی خودبازگشتی P^* و پارامترهای مدل $\boldsymbol{\varphi}_{p^*}^*=(\varphi_1^*,\dots,\varphi_{p^*}^*)'$ برآورد می‌گردند. پیش‌گویی h گام آینده به‌صورت $X_{n+h}^*-\bar{x}=\sum_{j=1}^{p}\varphi_j(X_{n+h-j}^*-\bar{x})+\varepsilon_{n+h}^*$ محاسبه می‌گردند، که در آن برای $n+h-j\le n$، $X_{n+h-j}^*=x_{n+h-j}^*$.

مشاهدات h گام آینده به‌صورت $X_{T+h}^*-\bar{x}=\sum_{j=1}^{p}\varphi_p(X_{T+h-j}^*-\bar{x})+\varepsilon_{T+h}^*$ محاسبه می‌گردد که در آن برای $X_t^*=x_t, t\le T$ است.

۸. در نهایت $F_{x_{T+h}^*}^*(x)$ تابع توزیع بوت‌استرپ نظری x_{T+h}^*، به‌عنوان برآورد توزیع x_{T+h} به‌شرط مشاهدات نمونه در نظر گرفته می‌شود.

۹. برآورد تجربی بوت‌استرپ تابع توزیع $F_{x_{T+h}^*}^*(x)$، به‌روش مونت‌کارلو با استفاده از تکرار B بار مراحل ٥ تا ۸ به‌صورت $F_{x_{T+h}^*}^*(x)=\#\{X_{T+h}^{*b}\le x\}/B, b\in 1,\dots,B$ به‌دست می‌آید.

۱۰. بازهٔ پیش‌گویی با ضریب $100(1-a)\%$ برای X_{T+h} به‌صورت $[Q^*(a/2), Q^*(1-a/2)]$ به‌دست می‌آید که در آن $Q^*(\cdot)=F_{x_{T+h}^*}^{*-1}(\cdot)$ چندک مورد نظر تابع توزیع تجربی بوت‌استرپ است.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

در روش ارائه شدهٔ پاسکال و همکاران [۱۲]، (PRR) به‌جای استفاده از تبدیل اتورگرسیو از مدل اصلی سری زمانی استفاده می‌شود. مراحل به‌دست آوردن بازهٔ پیش‌گویی به‌روش PRR بر اساس نمونهٔ مشاهده شده $y_{T-n+1},\dots,y_T$ از سری زمانی آریما (p,d,q) بدین‌صورت است:

اگر $d=0$ و $\theta_1,\dots,\theta_q$ و $\phi_0,\dots,\phi_p$ برآورد پارامترهای مدل آرما[1] (p,q) بدین‌صورت باشد:

$$y_t=\phi_0+\phi_1 y_{t-1}+\phi_p y_{t-p}+a_t+\theta_1 a_{t-1}+\dots+\theta_q a_{t-q}$$

که در آن $t=T-n+1,\dots,T$ است. برای به‌دست آوردن بازهٔ پیش‌گویی به‌روش PRR در مرحلهٔ ٥ الگوریتم بوت‌استرپ نیم‌پارامتری، نمونهٔ بوت‌استرپ $a_t^*,\dots,a_{t-q}^*$ به‌روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری از $\hat{a}_t,\dots,\hat{a}_{t-q}$ تولید می‌شوند و در مرحلهٔ ٦ برای محاسبهٔ Y_t^*ها از رابطهٔ

$$Y_t^*=\phi_0+\phi_1 Y_{t-1}+\dots+\phi_p Y_{t-p}+\hat{a}_t^*+\theta_1\hat{a}_{t-1}^*+\dots+\theta_q\hat{a}_{t-q}^*,\qquad t=T-n+1,\dots,T$$

استفاده می‌شود. در مرحلهٔ ۷ با استفاده از نمونه بوت‌استرپ $Y_1^*,Y_2^*,\dots,Y_n^*$ پارامترهای مدل $\phi_p^*=(\phi_0^*,\phi_1^*,\dots,\phi_p^*)'$ و $\theta_q^*=(\theta_1^*,\dots,\theta_q^*)'$ برآورد می‌گردند. در مرحلهٔ ۸ مشاهدات h گام آینده به‌صورت $Y_{T+h}^*=\phi_0^*+\sum_{j=1}^{p}\phi_j^* Y_{T+h-j}^*+\hat{a}_{T+h}^*+\sum_{j=1}^{q}\theta_j^*\hat{a}_{T+h-1}^*$ محاسبه می‌گردند که در آن برای $h\le 0$، $Y_{T+h}^*=y_{T+h}$ و $\hat{a}_{T+h}^*=\hat{a}_{T+h}$ است. مدل‌های آریما (p,d,q) که در آن $d\neq 0$ را می‌توان به‌صورت مدل آرما (p+d,q) نشان داد. برای مثال مدل ARI(۱،۱) که به‌صورت $Y_t-Y_{t-1}=\phi_0+\phi_1(Y_{t-1}-Y_{t-2})+a_t$ است. به صورت مدل AR(۲) $Y_t=\phi_0+(1+\phi_1)Y_{t-1}-\phi_1 Y_{t-2}+a_t\quad t=1,\dots,T$ در نظر گرفته می‌شود. در مرحلهٔ ٦ برای محاسبهٔ Y_t^*ها از رابطهٔ $Y_t^*=\phi_0+(1+\phi_1)Y_{t-1}^*-\phi_1 Y_{t-2}+\hat{a}_t^*$ استفاده می‌شود. و در مرحلهٔ ۸ مشاهدات h گام آینده به‌صورت $Y_{T+h}^*=\phi_0^*+(1+\phi_1^*)Y_{T+h-1}^*-\phi_1^* Y_{T+h-2}^*+\hat{a}_{T+h}^*$ برآورد می‌شوند که برای $h\le 0$، $Y_{T+h}^*=y_{T+h}$ است. مراحل محاسبهٔ بازهٔ پیش‌گویی برای مدل‌های AR(p) به‌روش PRR مانند الگوریتم ارائه شده است با این تفاوت که در مرحلهٔ ٤، $\varepsilon_t=\left(\frac{T-p}{T-2P}\right)^{1/2}(\varepsilon_t-\varepsilon^{(0)})$ است.

خواص حدی پیش‌گویی بوت‌استرپ

در این بخش خواص حدی برآوردهای مشاهدات آینده به‌روش CS ارائه شده در بخش ۲ بررسی می‌شود. برای این منظور فرض‌های ۱ تا ۳ را در نظر می‌گیریم.

فرض ۱: $x_t-\mu_x=\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j\varepsilon_{t-j},\quad \phi_0=1,\quad t\in z$ که در آن

$\{\varepsilon_t\}_{t\in z}$ i.i.d, $E\{\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}\}\equiv 0,\quad E\{\varepsilon_T^2|\mathcal{F}_{t-1}\}\equiv\sigma^2<\infty$ و $E[|\varepsilon_t|^s]<\infty,\quad s\ge 4.$

که در آن $\mathcal{F}_{t-1}$ سیگما میدان تولید شده توسط $\{\varepsilon_s\}_{s=-\infty}^{t-1}$ است.

فرض ۲: برای $|z|\le 1$، $\phi(z)$ کراندار و مخالف صفر است.

همچنین $\sum_{j=0}^{\infty} j^r|\phi_j|<\infty, r\in N$.

فرض۳: اگر $(n\to\infty)$ آن‌گاه $p=p(n)\to\infty, p(n)=o(n)$ و $\varphi_p=(\varphi_{1,n},\dots,\varphi_{p,n})'$ در معادلات یول والکر صدق می‌کند.

1. ARMA

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

قضیه: تحت فرض۱ با s=۴ و فرض۲ با r=۱ و فرض۳ با $p = o\left((n/\log n)^{1/4}\right)$ آن‌گاه

$$x^*_{T+h} \to x_{T+h}$$

اثبات:

$X^*_{T+h} = -\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{j,n} X^*_{T+h} + \varepsilon^*_{T+h}$ و $X_{T+h} = -\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j X_{T+h-j} + \varepsilon_{T+h}$ که در آن $\varphi_{j,n}$ برآورد φ_j بر اساس نمونهٔ n تایی $(x_{T-n+1},\dots,x_T)$ است. و برای $j > p(n)$ ، $\varphi_{j,n} = 0$ و برای $t \le T$ ، $x^*_t = x_t$ است.

به‌منظور سهولت در اثبات فرض می کنیم h=۱ است. از لم ۵,٤ در بوهلمن [۷] نتیجه می‌شود که $\varepsilon^*_{T+h} \xrightarrow{d} \varepsilon_{T+h}$ پس باید ثابت شود تفاوت عبارت‌های اول در X_{T+h} و X^*_{T+h} در احتمال به صفر میل می‌کند. با توجه به فرض h=۱ تفاوت این دو عبارت بدین‌صورت نمایش داده می‌شود:

$$-\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_{j,n}-\varphi_j)X_{T+h-j} = -\sum_{j=1}^{p(n)}(\varphi_{j,n}-\varphi_j)X_{T+h-j} + -\sum_{j=p(n)+1}^{\infty}\varphi_j X_{T+h-j} = S_{1,1} + S_{2,1}$$

و $E\left[\left|S_{2,1}\right|\right] \le E\left[\left|x_t\right|\right]\sum_{j=p(n)+1}^{\infty}\left|\varphi_j\right| = o(p^{-r})$ بنا بر این $S_{2,1} = o_p((n/\log(n))^{-r/(2r+2)})$ و نشان داده می‌شود که $S_{1,1} = o_p((n/\log(n))^{-r/(2r+2)})$ و

$$\left|S_{1,1}\right| \le \left|\sum_{j=1}^{p(n)}(\varphi_{j,n}-\varphi_{j,n})x_{T+j-1}\right| + \left|\sum_{j=1}^{p(n)}(\varphi_{j,n}-\varphi_j)x_{T+j-1}\right| = I_1 + I_2$$

که در آن $\varphi_p = (\varphi_{1,n},\dots,\varphi_{p,n})^t$ در معادلهٔ یول والکر $\Gamma_p\varphi_p = -\gamma_p$ صدق می کند.

با استفاده از قضیهٔ ۲,۱ در هنان و کوالیریز [۱۱] نشان داده می‌شود که

$$\max_{1\le j\le p}\left|(\varphi_{j,n}-\varphi_{j,n})\right| = o_{a,s}((\log(n)/n)^{1/2})$$

بنا بر این

$$I_1 \le \left(\sum_{j=1}^{p(n)}(\varphi_{j,n}-\varphi_{j,n})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{p(n)}x^2_{T+j-1}\right)^{1/2} \le$$

$$p(n)^{\frac{1}{2}}\max_{1\le j\le p}\left|(\varphi_{j,n}-\varphi_{j,n})\right| o_p(p(n)^{\frac{1}{2}}) = o_p(p(n)(n/\log(n))^{1/2}) =$$

$$o_p((n/\log(n))^{-r/(2r+2)})$$

و با استفاده از تعمیم نابرابری باکستر در هنان و دیستلر[۱۰] نشان داده می‌شود: $\sum_{j=0}^{p(n)}\left|\varphi_{j,n}-\varphi_j\right| \le c\sum_{j=p(n)+1}^{\infty}\left|\varphi_j\right|$ که در آن c مقداری ثابت است. بنا بر این

$$E[I_2] \le E[\left|x_t\right|]\sum_{j=1}^{p(n)}\left|\varphi_{j,n}-\varphi_j\right| = o(p^{-r})$$

و

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{j,n}x_{T+h-j} = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j x_{T+j-1} + o_p((n/\log(n))^{-r/(2r+2)})$$

بنا بر این $X^*_{T+1} \xrightarrow{d} X_{T+1}$.

بررسی شبیه‌سازی

در این بخش در یک بررسی شبیه‌سازی مونت‌کارلو دقت بازه‌های پیش‌گویی بوت‌استرپ برای اندازهٔ نمونه و توزیع‌های مختلف باقی‌مانده‌ها برای مدل MA(۱) به‌صورت $X_t = 0/4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ ارائه می‌گردند. توزیع باقی‌مانده‌ها به‌صورت $\varepsilon \sim N(0,1)$ و $\varepsilon \sim \exp(-1,1)$ و $\varepsilon \sim 0/9F_1 + 0/1F_2$ که در آن $F_1 \sim N(-1,1)$ و $F_2 \sim N(9,1)$ در نظر گرفته شده‌اند. مقادیر ارائه شده در جدول‌ها طبق این مراحل محاسبه شده‌اند:

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

۱. برای مدل MA(۱) بر اساس اندازهٔ نمونه و توزیع خطای در نظر گرفته شده، تعداد R= ۱۰۰۰ مشاهدهٔ آینده X_{T+h} تولید می شود.

۲. براساس الگوریتم ارائه شده در بخش ۲ بازهٔ پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم پارامتری به‌ازای B=۱۰۰۰ بار تکرار بوت‌استرپ به‌صورت $\left[Q_M^*(\alpha/۲), Q_M^*(۱-\alpha/۲)\right]$ محاسبه می‌شود. که در آن $M \in \{STG, SB, CDB, SEOB, PRR\}$ است. STG روش استاندارد گاوسی است، که بازهٔ پیش‌گویی را بر اساس فرض نرمال بودن باقی‌مانده‌ها محاسبه می‌کند.

۳. درصد پوشش به‌صورت $C_M = \#\{Q_M^*(\alpha/۲) \le x_{T+h}^r \le Q_M^*(۱-\alpha/۲)\}/R$ و طول بازه به‌صورت $L_M = Q_M^*(۱-\alpha/۲) - Q_M^*(\alpha/۲)$ محاسبه می‌شود که در آن r, X_{T+h}^r امین مشاهدهٔ تولید شده در مرحلهٔ یک است.

٤. با تکرار m=۲۰۰ بار مراحل ۱ الی ۳ میانگین درصد پوشش و طول بازهٔ پیش‌گویی به‌همراه خطاهای استاندارد و شاخص‌های دیگر بدین‌صورت است:

$$SE(\overline{L_M}) = (m^{-۱}(m-۱)^{-۱}\sum(L_{M,i} - \overline{L}_M)^۲)^{۱/۲}, \overline{L}_M = m^{-۱}\sum L_{i,M}$$
$$SE(\overline{C}_M) = (m^{-۱}(m-۱)^{-۱}\sum(C_{M,i} - \overline{C}_M)^۲)^{۱/۲}, \overline{C}_M = m^{-۱}\sum C_{M,i}$$
$$L_T = x_{T+h}^{[R(۱-\alpha/۲)]} - x_{T+h}^{[R(\alpha/۲)]}, \overline{L}_T = m^{-۱}\sum L_{T,i}, \overline{C}_T = (۱-\alpha)\%$$

در جدول‌های ۱ الی ۳ ستون‌های اول تا ششم به‌ترتیب شمارهٔ مشاهدهٔ پیش‌گویی، اندازهٔ نمونه (n)، روش، میانگین درصد پوشش بازه‌های پیش‌گویی $(\overline{C}_M)$ به‌همراه خطای استاندارد آن، میانگین درصدهای غیرپوشش از سمت چپ و راست، میانگین طول بازه‌های پیش‌گویی $(\overline{L}_M)$ به‌همراه خطای استاندارد آن در ۲۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو و ۱۰۰۰ بار تکرار بوت‌استرپ نشان داده شده است. روش‌های استفاده شده بر اساس ٥ روش SB, CSB, SEOB, PRR, STG است. چنان‌که در جدول‌های ۱ الی ۳ مشخص است تقریباً در همهٔ موارد بازه‌های پیش‌گویی به‌دست آمده با روش‌های PRR، SEOB، SB، STG و CSB به‌ترتیب درصد پوشش بیش‌تری دارند و همچنین درصد پوشش با افزایش اندازهٔ نمونه در تمام روش‌ها بیش‌تر شده است. بازهٔ پیش‌گویی برای ۳ گام آینده به‌روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبهٔ درونی (SEOB)، درصد پوشش بیش‌تر و میانگین طول بازهٔ پیش‌گویی بزرگ‌تری دارد. به‌طور کلی نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند روش PRR به‌دلیل استفاده از مدل اصلی داده‌ها و همچنین روش SEOB به‌دلیل استفاده از مدل مناسب‌تر بر روی نمونه‌های بوت‌استرپ برازش داده نسبت به‌روش‌های دیگر، درصد پوشش بیش‌تری دارند.

مثال میانگین سالانه دمای هوای اصفهان

در این بخش سری زمانی داده‌های میانگین سالانه دمای هوای اصفهان بر حسب درجهٔ سانتی‌گراد از سال ۱۹٥۱ تا ۲۰۰٥ بررسی شده است. در شکل ۱ نمودار این سری زمانی نشان داده شده است. داده‌ها تا سال pacf و acf را نشان می‌دهند. با استفاده از الگوریتم ارائه شده در بخش ۲ بازهٔ پیش‌گویی بر اساس روش‌های SB, CSB, SEOB, PRR و STG برای ۱۰ مشاهدهٔ پایانی سری با ضریب اطمینان ۹٥% محاسبه شده است.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

۱۹۹۵ را به‌عنوان سری مشاهده شده در نظر گرفته شده است که با توجه به‌روند صعودی سری و بررسی نمودارهای acf و pacf هم‌چنین مقایسهٔ مدل، بررسی کفایت مدل و باقی‌مانده‌ها، مدل آریما (۲،۱،۰)[1] با AICC برابر با ۳/ ۱۰۷ روی داده‌ها برازش داده شد. شکل‌های ۲، ۳ و ۴ به‌ترتیب نمودار مقادیر تفاضل‌گیری شده و

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی برای مدل MA(۱) با خطای نرمال

مشاهده آینده (h)	اندازه نمونه (n)	روش	درصد پوشش (انحراف معیار)	درصد غیر پوشش چپ و راست	میانگین طول بازه (انحراف معیار)
۱	۷۵	T	۹۵	(۲/۵)(۲/۵)	۳/٦٤
		SB	۸۹/٤٥ (۰/۵۱)	(۵/۵)(۵/۰٤)	۳/۸٦ (۰/۰۳)
		SEOB	۹۰/۵۱ (۰/٤۵)	(۵/۰٤)(٤/٤۳)	۳/۹٦ (۰/۰٤)
		CSB	۸۸/٦۵ (۰/۵۸)	(۵/۸۵)(۵/٤۹)	۳/۸۱ (۰/۰۳)
		STG	۸۹/۸۸ (۰/٤۵)	(۵/۱۲)(٤/۹۸)	۳/۸۵ (۰/۰۳)
		PRR	۹٤/۱۷ (۰/۲۸)	(۳/۱۹)(۲/٦۳)	٤/۲۲ (۰/۰٤)
۱	۱۰۰	SB	۹۰/۲۳(۰/۵٤)	(۵/۷۸)(۳/۹٤)	۳/۹۷ (۰/۰٤)
		SEOB	۹۰/٤۷ (۰/۵۰)	(۵/٦۱)(۳/۹)	۳/۹۷ (۰/۰٤)
		CSB	۸۹/٤۸ (۰/٦٦)	(٦/۱۹)(٤/۳۲)	۳/۹٦ (۰/۰۵)
		STG	۹۰/۱۰ (۰/٤٦)	(۵/۷٦)(٤/۱۲)	۳/۸۵ (۰/۰۳)
		PRR	۹٤/۲۵ (۰/۲۷)	(۳/۰۹)(۲/٦۵)	٤/۲۸ (۰/۰٤)
۳	۷۵	SB	۹۳/۷۳ (۰/۲٦)	(۳/۰۳)(۳/۲۲)	٤/۱۷ (۰/۰٤)
		SEOB	۹۷/۲۰ (۰/۲۸)	(۱/٤۲)(۱/۳۷)	۵/۲٤ (۰/۰۸)
		CSB	۹۳/٤۸ (۰/۲۹)	(۳/۱٦)(۳/۳۵)	٤/۱۵ (۰/۰٤)
		STG	۹٤/۲۷ (۰/۲۲)	(۲/۷)(۳/۰۱)	٤/۱۸ (۰/۰۳)
		PRR	۹٤/۲۷ (۰/۲۵)	(۲/۸۰)(۲/۹۲)	٤/۲۵ (۰/۰٤)
۳	۱۰۰	SB	۹۳/۹۱ (۰/۲۳)	(۳/۱٦)(۲/۹۲)	٤/۲۵ (۰/۰۳)
		SEOB	۹۷/۵٤ (۰/۲۳)	(۱/۲۳)(۱/۲۱)	۵/۳۵ (۰/۰۹)
		CSB	۹۳/٤٦ (۰/۲٤)	(۳/۳۷)(۳/۱٦)	٤/۱۸ (۰/۰۳)
		STG	۹۳/۸۸ (۰/۲۱)	(۳/۰۳)(۳/۰۸)	٤/۱۸ (۰/۰۳)
		PRR	۹٤/۱۸ (۰/۲٤)	(۲/۸۵)(۲/۹۵)	٤/۲۷ (۰/۰٤)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی برای مدل MA(۱) با خطای نمایی

مشاهده آینده (h)	اندازه نمونه (n)	روش	درصد پوشش (انحراف معیار)	درصد غیر پوشش چپ و راست	میانگین طول بازه (انحراف معیار)
۱	۷۵	T	۹۵/۰	(۲/۵)(۲/۵)	٤
		SB	۸۹/۰٦ (۰/۹۲)	(۵/۲۸)(۵/٦۵)	۳/۸۱ (۰/۰۸)
		SEOB	۸۹/۷٦ (۰/۸٤)	(۵/۵٤)(٤/٦۸)	۳/۸۵ (۰/۰۸)
		CSB	۸٦/۵۹ (۱/۲۰)	(۵/٤۵)(۷/۹۵)	۳/۷٤ (۰/۰۸)
		STG	۸۹ (۰/۵۲)	(۹/۲٦)(۰/٤۱)	۳/۸٦ (۰/۰۷)
		PRR	۹۵/۷۷ (۰/۳۱)	(٤/۱۱)(۰/۱۱)	٤/۲۱ (۰/۰۹)
۱	۱۰۰	SB	۹۰/٤٦ (۰/۸۰)	(۵/٤۳)(٤/۸۹)	۳/۷۵ (۰/۰۷)
		SEOB	۹۰/٦٤ (۰/۷٤)	(٤/۹٦)(٤/۳۹)	۳/۸۲ (۰/۰۷)
		CSB	۸۷/٤۵ (۱/۱۹)	(۵/۸٤)(٦/۷۰)	۳/٦۷ (۰/۰۷)
		STG	۹۰/٤۵ (۰/٤۵)	(۸/۷۸)(۰/۷۵)	۳/۸۲ (۰/۰۵)
		PRR	۹۵/۹٦ (۰/۲۲)	(۳/۸۹)(۰/۱٤)	٤/۱۰ (۰/۰٦)
۳	۷۵	SB	۹۵/٤ (۰/۳۰)	(٤/۳۹)(۰/۱۹)	٤/۰۲ (۰/۰٦)
		SEOB	۹۷/۵۳ (۰/۲٦)	(۲/۳۸)(۰/۰۸)	٤/۰٦ (۰/۱۰)
		CSB	۹۵/۲٦ (۰/۳۱)	(٤/۳۹)(۰/۳۳)	٤ (۰/۰٦)
		STG	۹۲/۲۷ (۰/۳۱)	(۷/۷۲)(۰)	٤/۰۸ (۰/۰۵)
		PRR	۹۵/۷۱ (۰/۲۱)	(٤/۰۸)(۰/۲۰)	۳/۹۷ (۰/٦۱)
۳	۱۰۰	SB	۹۵/۸۲ (۰/۲۷)	(۳/۹۸)(۰/۱۹)	٤/۲۳ (۰/۰۸)
		SEOB	۹۷/۹۸ (۰/۱٦)	(۱/۹۷)(۰/۰۳)	۵/۳۱ (۰/۱۱)
		CSB	۹۵/۳۹ (۰/۲۸)	(٤/۱٤)(۰/٤٦)	٤/۱۳ (۰/۰۷)
		STG	۹۲/۷۸ (۰/۳۳)	(۷/۲۱)(۰)	٤/۲٤ (۰/۰٦)
		PRR	۹٦/۰۵ (۰/۲٤)	(۳/۷٤)(۰/۲۰)	٤/۱۸ (۰/۰۷)

شکل ۵ بازهٔ پیش‌گویی یک گام آینده برای ۱۰ مشاهدهٔ پایانی سری را به دو روش PRR و SEOB را به‌ترتیب به‌صورت خط چین و خط ممتد نشان می‌دهد. در شکل ٦ بازهٔ پیش‌گویی برای۱۰ گام آینده به دو روش SEOB و SB نشان داده شده است که در آن روش SEOB به‌صورت خط چین نشان داده شده است و طول بازهٔ پیش‌گویی به روش SEOB از روش SB بزرگ‌تر است. شکل ۷ بازهٔ پیش‌گویی به دو روش SB و CSB را نشان می‌دهد که در آن روش CSB به‌صورت خطچین نشان داده شده است و چنان‌که مشخص است بازه‌های پیش‌گویی به‌دست آمده با استفاده از این دو روش تقریباً بر هم منطبق هستند. در شکل ۸ بازه‌های پیش‌گویی برای

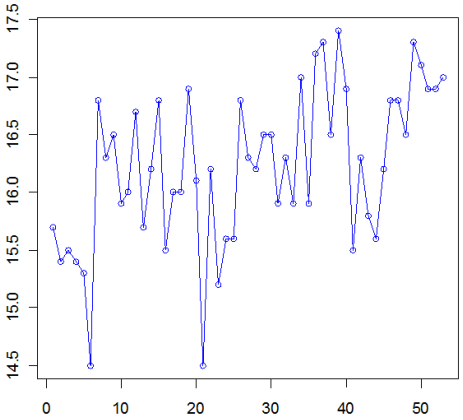
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

۱ گام آینده به دو روش STG و PRR نشان داده شده است. که در آن بازهٔ پیش‌گویی به‌روش PRRبه‌صورت خط چین نشان داده شده است.

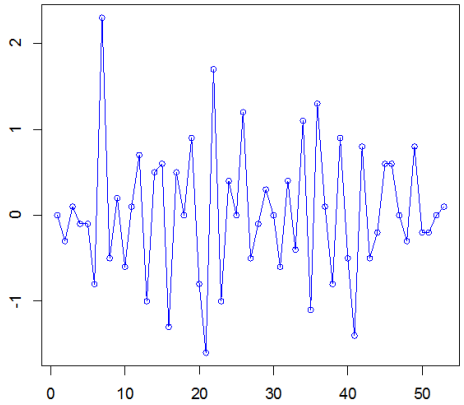
جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی برای مدل MA(۱) با خطای آمیخته

مشاهده آینده (h)	اندازه نمونه (n)	روش	درصد پوشش (انحراف معیار)	درصد غیر پوشش چپ و راست	میانگین طول بازه (انحراف معیار)
۱	۷۵	T	۹۵/۰	(۲/۵)(۲/۵)	۳/۸
		SB	۹۰/۱٤ (۰/۵)	(۵/۲۵)(٤/٦۰)	۳/۵۳ (۰/۰٤)
		SEOB	۹۰/۲٦ (۰/٤٦)	(۵/۱٤)(٤/۵۹)	۳/۵۲ (۰/۰۳)
		CSB	۸۹/۳۳ (۰/٦۰)	(۵/۷)(٤/۹٦)	۳/٤۹ (۰/۰٤)
		STG	۹۰/۱۳ (۰/۳۹)	(٤/۸۳)(۵/۰۲)	۳/۵۸ (۰/۰۳)
		PRR	۹٤/۱۲ (۰/۲٦)	(۳)(۲/۸٦)	۳/۸٤ (۰/۰٤)
۱	۱۰۰	SB	۹۰/۲۵ (۰/٤۲)	(۵/۹۲)(۳/۸۲)	۳/۵٤ (۰/۰۴)
		SEOB	۹۰/٤۱ (۰/٤۰)	(۵/۸۱)(۳/۷۷)	۳/۵۵ (۰/۰۳)
		CSB	۸۹/۵۸ (۰/٤٦)	(٦/۳٤)(٤/۰۷)	۳/۵۱ (۰/۰٤)
		STG	۸۹/٦۳ (۰/٤۷)	(٦/۰۹)(٤/۲۷)	۳/٤۷ (۰/۰۲)
		PRR	۹٤/۲۳ (۰/۲۷)	(۳/۱٤)(۲/٦۲)	۳/۸۳ (۰/۰۳)
۳	۷۵	SB	۹۳/۲۲ (۰/۳۱)	(۳/٤۲)(۳/۳۵)	۳/۷۸ (۰/۰٤)
		SEOB	۹۷/۰۳ (۰/۳۱)	(۱/٦٤)(۱/۳۲)	٤/۷۰ (۰/۰۷)
		CSB	۹۳/۰۸ (۰/۳۳)	(۳/۵۵)(۳/۳٦)	۳/۷٦ (۰/۰٤)
		STG	۹٤/۰٤ (۰/۲۵)	(۲/۷۹)(۳/۱٦)	۳/۷۷ (۰/۰۳)
		PRR	۹٤/۰۱ (۰/۲٦)	(۲/۹۵)(۳/۰۲)	۳/۸۲ (۰/۰٤)
۳	۱۰۰	SB	۹٤/۵ (۰/۲٦)	(۳)(۲/۵۰)	۳/۸۹ (۰/۰٤)
		SEOB	۹۷/۷٦ (۰/۲٤)	(۱/۲۱)(۱/۰۲)	٤/۹۱ (۰/۰۷)
		CSB	۹٤/۰٤ (۰/۲۷)	(۳/۲٤)(۲/۷)	۳/۸۱ (۰/۰۳)
		STG	۹٤/۵٤ (۰/۲۲)	(۲/۷۷)(۲/٦۸)	۳/۸۱ (۰/۰۲)
		PRR	۹٤/٦۲ (۰/۲٦)	(۲/۸۷)(۲/۵۰)	۳/۸۸ (۰/۰۳)

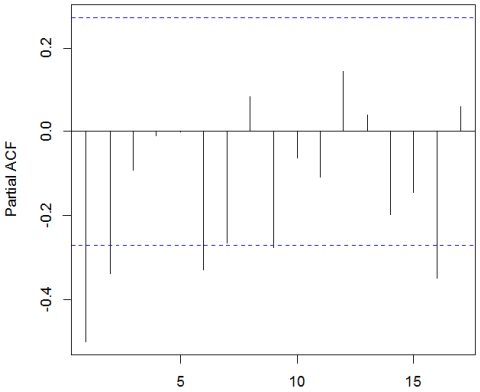
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]



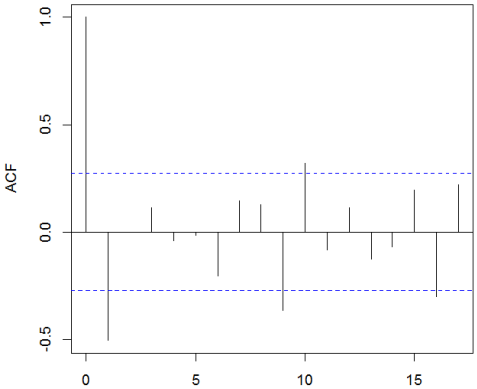
شکل۱. نمودار سری زمانی داده‌های میانگین سالانه دمای هوای اصفهان



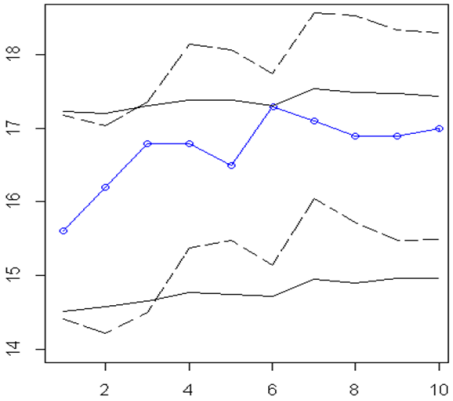
شکل۲. نمودار سری زمانی داده‌های تفاضل‌گیری شدهٔ میانگین سالانه دمای هوای اصفهان



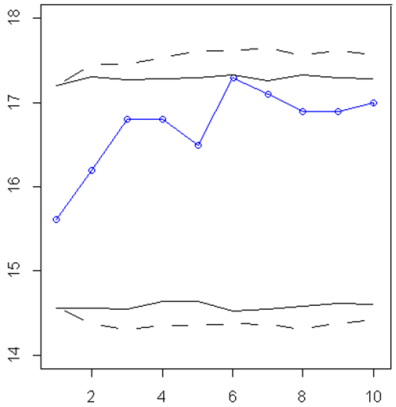
شکل۳. نمودار pacf مقادیر تفاضل‌گیری شدهٔ میانگین سالانه دمای هوای اصفهان



شکل٤. نمودار acf مقادیر تفاضل‌گیری شده‌ی میانگین سالانه دمای هوای اصفهان

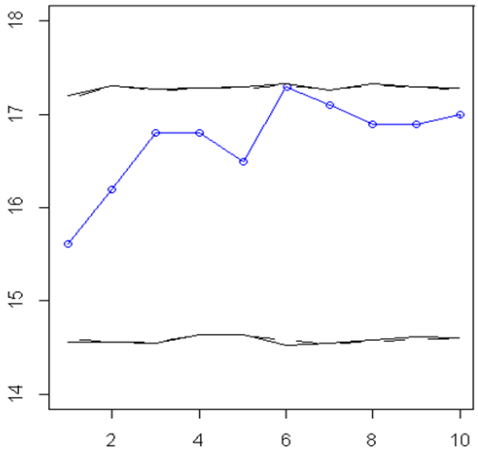


شکل۵. بازه‌هاي پيش‌گويي ۱ گام آينده ميانگين دماي هواي اصفهان به‌روش‌هايSEOB (خطممتد) و PRR(خط چين)

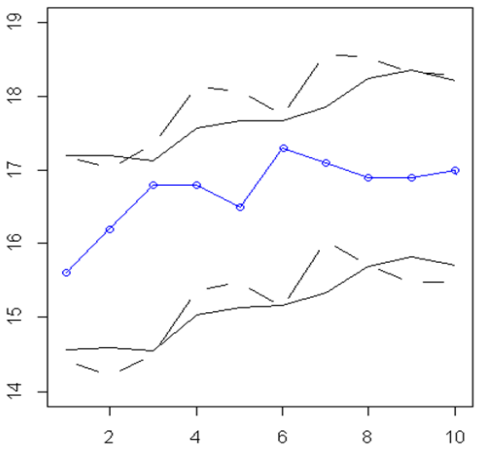


شکل ۶. بازه‌ی پیش‌گویی بوت‌استرپ ۱۰ مشاهدهٔ پایانی سری میانگین سالانه دمای هوای اصفهان به‌روش‌های SB (خط چین) وSEOB (خط ممتد)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]



شکل۷. بازهٔ پیش‌گویی بوت‌استرپ ۱۰ مشاهدهٔ پایانی سری میانگین سالانه دمای هوای اصفهان به‌روش‌های SB (خط ممتد) و CSB (خط چین)



شکل ۸. بازهٔ پیش‌گویی ۱۰ مشاهدهٔ پایانی سری میانگین سالانه دمای هوای اصفهان بر اساس یک گام آینده به‌روش‌های STG (خط ممتد) و PRR (خط چین)

نتیجه‌گیری

در تحلیل داده‌های سری‌های زمانی معمولاً فرض نرمال بودن باقی‌مانده‌ها الزامی است. در این مقاله روش بوت‌استرپ برای بازهٔ پیش‌گویی سری‌های زمانی بدون فرض معین بودن توزیع باقی‌مانده‌ها به ۵ روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری در دو حالت شرطی و غیرشرطی و بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبهٔ درونی، روش ارائه شده در پاسکال و همکاران [۱۲] و روش استاندارد گاوسی ارائه شد. سپس خواص مجانبی برآورد بوت‌استرپ مشاهده‌ای آینده بررسی شد. همچنین با استفاده از بررسی شبیه‌سازی مونت کارلو روش‌های ارائه شده مقایسه شدند. براساس نتایج به‌دست آمده روش‌های PRR، SEOB بدون درنظر گرفتن فرض معلوم بودن توزیع باقی‌مانده‌ها درصد پوشش بیش‌تری نسبت به‌روش‌های دیگر داشتند و بازهٔ پیش‌گویی برای ۳ گام آینده به‌روش SEOB، درصد پوشش بیش‌تر و همچنین میانگین طول بازهٔ پیش‌گویی بزرگ‌تری دارد. به‌طورکلی روش PRR به‌دلیل استفاده از مدل اصلی داده‌ها و همچنین روش SEOB به‌دلیل استفاده از مدل اتورگرسیو بر اساس نمونه‌های بوت‌استرپ، درصد پوشش بیش‌تری نسبت به‌روش‌های دیگر دارد.

منابع

1. Alonso A.M., Pe˜na D., Romo J., "Forecasting time series with sieve bootstrap", Journal of Statistical Planning and Inference, 100 (2002) 1-11.
2. Alonso A.M., Pe˜na D., Romo J., "On sieve bootstrap prediction intervals", Statistics & Probability Letters, 65 (2003)13-20.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

3. Alonso A.M., Pe˜na D., Romo J., (2004)Introducing model uncertainty in time series bootstrap", W.P.01-14,Universidad Carlos III de Madrid, Madrid (2004).

4. An H.Z., Chen Z.G., Hannan E.J., "Autocorrelation, autoregression and autoregressive approximations", Ann. Statist., 10 (1982) 926-936.

5. Box G.E.P., Jenkins G.M., "Time Series Analysis: Forecasting and Control", San Francisco: Holden Day (1976).

6. Breidt F.J., Davis R.A., Dunsmuir W.T., "Improved Bootstrap Prediction Intervals for Autoregressions", J. Time Ser. Anal., 16 (1995) 177-200.

7. Bühlmann P., "Sieve bootstrap for time series", Bernoulli, 3 (1997) 123-148.

8. Cao R., Delgado M.A., González-Manteiga W., "Nonparametric curve estimation: an overview", Investigaciones Económicas, 21 (1997) 209-252.

9. Efron B., "Bootstrap methods: another look at the jackknife", Ann. Statist., 7 (1979) 1-26.

10. Hannan E.J., Deistler M., "The Statistical Theory of Linear Systems", Wiley, New York (1988).

11. Hannan E.J., Kavalieris L., "Regression, autoregression models", J. Time Ser. Anal., 7 (1986) 27-49.

12. Pascual L., Romo J., Ruiz E., "Bootstrap predictive inference for ARIMA processes", W.P. 98-86, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid (1998).

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]