نشریه علوم دانشگاه تربیت معلم
جلد۱۰، شماره ۱
تاریخ چاپ: بهار ۱۳۹۱

روش بوت‌استرپ برای تعیین حدود کنترل میانگین فرآیند آماری

*نصراله ایران‌پناه، مرتضی مختاری‌مقدم: دانشگاه اصفهان

چکیده

معمولاً عملکرد یك فرآیند تولیدی به‌وسیلهٔ نمودارهای شوهارت که ابزاری برای کشف انحراف‌های با دلیل و بهبود فرآیند با کاهش تغییرپذیری است، تحت نظارت و کنترل قرار می‌گیرد. هنگامی که توزیع فرآیند نرمال نباشد این‌گونه نمودارها کارایی ندارند. روش بوت‌استرپ یك خانواده از روش‌های باز نمونه‌گیری است که می‌تواند بدون فرض نرمال بودن مشاهده‌ها در کنترل کیفیت آماری استفاده شود. در مقاله‌های متعددی تنها از روش فاصلهٔ اطمینان صدکی برای تعیین حدود کنترل استفاده شده است. در این مقاله علاوه بر فاصله‌های اطمینان صدکی بوت استرپ، t-بوت استرپ، تصحیح اریبی شتابیده (BCa) و فاصلهٔ اطمینان تقریبی بوت‌استرپ (ABC) برای تعیین حدود کنترل میانگین فرآیند استفاده می‌شوند. سپس در یك بررسی شبیه‌سازی از این فواصل اطمینان بوت‌استرپ برای حدود کنترل میانگین استفاده و مقایسه می‌شوند. در نهایت این حدود کنترل بوت‌استرپ برای نمودار میانگین داده‌های میزان گاز CO2 در نوشابه‌سازی کارخانه زمزم اصفهان استفاده می‌شود.

مقدمه

از اهداف اصلی کنترل فرآیند آماری، پی بردن سریع به‌وجود انحراف‌های با دلیل یا تغییرات در فرآیند قبل از تولید تعداد زیادی محصول معیوب است. پس از آن، علل چنین انحراف‌هایی بررسی می‌شود و اقدامات اصلاحی انجام می‌گیرد. نمودارهای کنترل یکی از روش‌های کنترل فرآیند در حین تولید است. نمودارهای کنترل شامل یك خط مرکز که مقدار متوسط مشخصه را در حالت تحت کنترل نشان می‌دهد و همچنین دو خط افقی دیگر است که حد کنترل بالا (UCL) و حد کنترل پایین (LCL) را نشان می‌دهد. این حدود کنترل به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اگر فرآیند تحت کنترل باشد، تقریباً همهٔ نقاطی که بر اساس اطلاعات نمونه محاسبه شده‌اند بین این حدود واقع می‌شوند و تا زمانی که نقاط بین حدود کنترل قرار گیرند، فرض می‌شود فرآیند تحت کنترل است و نیازی به فعالیت‌های اصلاحی نیست. اگر نقطه‌ای خارج از حدود کنترل رسم شود یا نقاط دارای روند غیرتصادفی باشند، در نتیجه، فرآیند در شرایط خارج از کنترل قرار دارد و اقدامات اصلاحی نیاز است تا منبع ایجاد انحراف با دلیل تعیین و حذف گردد. یکی از بهترین نمودارهای کنترل نمودارهای کنترل شوهارت است. دو مشخصهٔ مهم در کنترل فرآیند آماری تحت کنترل قرار دادن مرکز و تغییرپذیری فرآیند است. در این مقاله

واژه‌های کلیدی: نمودار کنترل میانگین، فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ، t - بوت استرپ، BCa، ABC
دریافت ۸۹/۱۰/۲۰ پذیرش۹۰/۷/۱۷
*نویسنده مسئول

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

حدود کنترل شوهارت $\overline{X}$ را برای کنترل مرکز فرآیند در نظر می‌گیریم. فرض نرمال بودن مشاهدات از فرضیه‌های اصلی، استفاده از حدود کنترل شوهارت است. حال اگر مشخصهٔ مورد نظر دارای توزیعی متفاوت با توزیع نرمال باشد آنگاه می‌توان با توجه به قضیهٔ حد مرکزی حدود کنترل را باز هم طراحی کرد. اما باید به این نکته توجه داشت که حجم نمونهٔ در کنترل کیفیت معمولاً برابر ٤، ٥ یا ٦ است. لذا نتایج به‌دست آمده با توجه به قضیهٔ حد مرکزی چندان معتبر نخواهد بود. در این حالت می‌توان از روش بوت‌استرپ استفاده کرد. مقاله‌های متعددی روش بوت‌استرپ را برای طراحی حدود کنترل فرآیند آماری وقتی که توزیع فرآیند نامعلوم باشد پیشنهاد کرده‌اند. بجگیر [١] فاصلهٔ اطمینان صدکی بوت‌استرپ را برای تعیین ساختار حدود کنترل نمودارهای شوهارت به‌کار برد. فرانکلین و واسرمن [٥] حدود اطمینان بوت‌استرپ را برای کارایی فرآیند بررسی کردند. سپالا و همکاران [٩] کنترل فرآیند آماری را از طریق زیرگروه‌های بوت‌استرپ بررسی کردند. لیو و تانگ [٦] نمودارهای کنترل را برای مشاهدات مستقل و وابسته بر اساس روش بوت‌استرپ به‌کار بردند. وو و وانگ [١١] و وود و همکاران [١٢] روش بوت‌استرپ مدل وابسته را برای تحلیل حدود کنترل بررسی کردند. تیاراچاکول و همکاران [١٠] یك روش بوت‌استرپ پیشرفته‌تر بر اساس تحلیل باقیمانده‌ها برای نمودارهای کنترل فرآیند آماری پیشنهاد کردند. پارك [٨] بر اساس روش بوت‌استرپ حدود کنترل را برای نمودار کنترل میانهٔ فرآیند ارائه کرد. در همهٔ فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ استفاده شده در مراجع بالا، فقط فاصلهٔ اطمینان صدکی بوت‌استرپ برای تعیین حدود کنترل استفاده شده است. در این مقاله علاوه بر فاصلهٔ اطمینان صدکی بوت استرپ، فاصله‌های اطمینان t- بوت استرپ، BCa و ABC برای تعیین حدود کنترل استفاده و مقایسه شده است.

در این مقاله، ابتدا روش و فاصله‌های اطمینان صدکی بوت استرپ، t- بوت استرپ، فاصلهٔ اطمینان BCa و ABC را ارائه می‌کنیم. سپس در یك پژوهش شبیه‌سازی مقایسهٔ میان حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ را برای سه توزیع نرمال، لگ نرمال و خی‌دو انجام می‌دهیم. انتخاب این سه توزیع برای بررسی اثر چولگی است، توزیع نرمال به‌عنوان توزیع فاقد چولگی و توزیع‌های لگ نرمال و خی‌دو به‌عنوان توزیع‌های دارای چولگی انتخاب شده‌اند. در این پژوهش شبیه‌سازی اثر چولگی، پارامترهای توزیع و حجم نمونه را بر روی حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ بررسی می‌کنیم. ملاك مقایسه میان حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ میانگین طول فاصلهٔ اطمینان و احتمال پوشش است. در نهایت برای داده‌های واقعی میزان $CO2$ نوشابه در کارخانهٔ زمزم، حدود کنترل میانگین را به‌وسیلهٔ بوت‌استرپ به‌دست می‌آوریم.

روش و فاصله‌های اطمینان بوت استرپ

افرون [٢] روش بازنمونه‌گیری بوت‌استرپ را برای برآورد اندازهٔ دقت برآوردگرها پیشنهاد کرد. فرض کنید $X=\{X_1,\ldots,X_n\}$ نمونه‌ای با توزیع نامعلوم F_θ و $\hat{\theta}=t(x)$ برآوردگر پارامتر θ باشد. در الگوریتم

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

بوت‌استرپ ابتدا نمونهٔ بوت‌استرپ $X^*=\{X^*_1,\ldots,X^*_n\}$ را به‌روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری از نمونهٔ مشاهده شده $\boldsymbol{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$ به‌دست می‌آوریم. سپس برآوردگر بوت استرپ $\hat{\theta}^*=t(x^*)$ را محاسبه می‌کنیم. مراحل قبل را B بار تکرار کرده و B برآوردگر بوت‌استرپ $\{\hat{\theta}^*_b;b=1,\ldots,B\}$ را به‌دست می‌آوریم. در نهایت برآوردگر تجربی اریبی، خطای استاندارد و توزیع برآوردگر $\hat{\theta}$ را محاسبه می‌کنیم. فاصله‌های اطمینان صدکی بوت استرپ، t-بوت استرپ، BCa و ABC برای پارامتر مجهول θ بدین صورت ارائه می‌شود:

۱. فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ

افرون [۲] فاصلهٔ اطمینان صدکی بوت‌استرپ را معرفی کرد. فرض کنید $\boldsymbol{X}=\{X_1,\ldots,X_n\}$ نمونهٔ مستقل و هم‌توزیع به اندازهٔ n از جامعه‌ای با پارامتر مجهول θ باشد. برآوردگر $\hat{\theta}$ را برای پارامتر θ در نظر می‌گیریم. در الگوریتم بوت‌استرپ ابتدا نمونهٔ بوت‌استرپ $\boldsymbol{X}^*=\{X^*_1,\ldots,X^*_n\}$ را به‌روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری از نمونه‌های مشاهده شده $\boldsymbol{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$ به‌دست می‌آوریم. سپس برآوردگر بوت استرپ $\hat{\theta}^*$ را محاسبه می‌کنیم. در نهایت با تکرار B بار مراحل قبل برآوردگرهای بوت‌استرپ $\hat{\theta}^*_1,\ldots,\hat{\theta}^*_B$ را به‌دست می‌آوریم. در این صورت فاصلهٔ اطمینان صدکی بوت‌استرپ با ضریب $1-\alpha$ بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\theta\in\left(\hat{\theta}^*_{[B(\frac{\alpha}{2})]};\hat{\theta}^*_{[B(1-\frac{\alpha}{2})]}\right)$$

که در آن $\hat{\theta}^*_{[j]}$، j- امین مقدار مرتب شده برآوردگرهای بوت‌استرپ $\hat{\theta}^*_b;b=1,\ldots,B$ است.

۲. فاصلهٔ اطمینان t- بوت استرپ

افرون [۳] فاصلهٔ اطمینان t- بوت‌استرپ را معرفی کرد. در این روش که بر اساس کمیتی محوری مشابه کمیت محوری آماره t- استیودنت است، توزیع آماره مستقیماً از روی داده‌ها برآورد می‌گردد. برای تشکیل فاصلهٔ اطمینان t- بوت‌استرپ با در نظر گرفتن برآوردگر $\hat{\theta}$ مانند روش فاصلهٔ اطمینان صدکی بوت‌استرپ ابتدا برآوردگر بوت استرپ $\hat{\theta}^*$ را محاسبه می‌کنیم. سپس تابع محوری بوت‌استرپ $\hat{t}^*=\frac{\hat{\theta}^*-\hat{\theta}}{\widehat{Se}^*}$ را محاسبه می‌کنیم که در آن $\widehat{Se}^*=\sqrt{\frac{1}{B_1-1}\sum_{b=1}^{B_1}\left(\hat{\theta}^*_b-\bar{\hat{\theta}}\right)^2}$، برآوردگر بوت‌استرپ خطای استاندارد برآوردگر $\hat{\theta}$ براساس B_1 نمونهٔ بوت‌استرپ است. در نهایت با تکرار B بار مراحل قبل توابع محوری بوت‌استرپ $\hat{t}^*_1,\ldots,\hat{t}^*_B$ را به‌دست می‌آوریم. در این صورت فاصلهٔ اطمینان t- بوت‌استرپ با ضریب $1-\alpha$ بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\theta\in\left(\hat{\theta}-\hat{t}^*_{\left[B\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]}\hat{S}e\left(\hat{\theta}\right);\ \hat{\theta}-\hat{t}^*_{\left[B\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]}\hat{S}e\left(\hat{\theta}\right)\right)$$

که در آن $\hat{t}^*_{[j]}$، j-امین مقدار مرتب شدهٔ توابع محوری بوت استرپ $\{\hat{t}^*_b;b=1,\ldots,B\}$ است. این روش به‌ویژه برای آماره‌های مکانی نظیر میانگین، میانگین پیراسته، میانهٔ یا صدک‌های نمونه‌ای بسیار خوب عمل می‌کند

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

(افرون [۳]).

۳. فاصله اطمینان *BCa*

یکی از اهداف اصلی نظریه بوت‌استرپ به‌دست آوردن فاصله‌های اطمینان با دقت پوشش زیاد است. فاصلهٔ اطمینان t- بوت‌استرپ احتمال پوشش زیادی دارد اما در عمل همیشه رفتار منظمی ندارد (افرون [۴]). فاصلهٔ اطمینان صدکی بوت‌استرپ هر چند رفتارهای نامنظم کمی دارد، اما سرعت همگرایی آن ضعیف است (افرون [۴]). افرون یک نسخهٔ ویرایش شده فاصلهٔ صدکی با نام فاصلهٔ اطمینان تصحیح اریبی شتابیده BCa با دو مقدار تصحیح اریبی $\hat{Z}_0$ و شتاب $\hat{a}$ معرفی کرد که دو مشکل مذکور را ندارد. در این روش $\hat{Z}_0$ بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$\hat{Z}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{\#\left\{\ \hat{\theta}_b^* < \hat{\theta}\ \right\}}{\mathrm{B}}\right)$$

که در آن $\left\{\hat{\theta}_b^*\ ;b=1,\ldots,B\right\}$ برآوردگرهای بوت‌استرپ و Φ تابع توزیع نرمال استاندارد هستند. $\hat{Z}_0$ میانهٔ اریبی $\hat{\theta}^*$ را اندازه می‌گیرد و اگر $\hat{Z}_0 = 0$ شود به این معناست که $\hat{\theta}$ میانهٔ مقادیر $\hat{\theta}_b^*$ است. از طرف دیگر مقدار $\hat{a}$ به این دلیل شتاب نامیده می‌شود که نسبت تغییرات خطای استاندارد برآوردگر $\hat{\theta}$ به پارامتر θ را اندازه می‌گیرد. روش‌های زیادی برای محاسبهٔ $\hat{a}$ وجود دارد که ساده‌ترین آن‌ها برآورد $\hat{a}$ به روش جک نایف است. فرض کنید $\underline{X}_{(i)}$ نمونه‌ای با حذف i- امین مشاهده از نمونهٔ $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ باشد و $\hat{\theta}_{(i)} = t\left(\underline{X}_{(i)}\right)$ برآوردگر پارامتر θ با حذف مشاهده i-ام باشد. سپس $U_i = \hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}_{(i)}$ تعریف می‌کنیم که در آن $\hat{\theta}_{(.)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_{(i)}$ است. در نهایت برآورد $\hat{a}$ به‌صورت $\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i^3}{6\left[\sum_{i=1}^{n} U_i^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ محاسبه می‌گردد. در این صورت فاصلهٔ اطمینان *BCa* بوت‌استرپ با ضریب $1-\alpha$ به‌صورت $\theta \in \left(\hat{\theta}^*_{\left[B\ (1-\frac{\alpha}{2})\right]}\ ;\ \hat{\theta}^*_{\left[B\ (\frac{\alpha}{2})\right]}\right)$ به‌دست می‌آید، که در آن $\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \left(\hat{Z}_0 + \frac{\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}}{1-\hat{a}\left(\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)}\right)$ و $1-\frac{\tilde{\alpha}}{2} = \left(\hat{Z}_0 + \frac{\hat{Z}_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\hat{a}\left(\hat{Z}_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}\right)$ است.

۴. فاصله اطمینان *ABC*

یکی از نقاط ضعف فاصله اطمینان بوت‌استرپ *BCa* تعداد زیاد بازنمونه‌گیری‌ها است و زمان زیادی برای محاسبات لازم دارد. افرون [۴] تقریبی مناسب از فاصلهٔ اطمینان *BCa* به نام فاصلهٔ اطمینان تقریبی بوت‌استرپ *ABC* معرفی کرد. فاصلهٔ اطمینان *ABC* نتایج نمونه‌گیری تصادفی بوت‌استرپ را به بسط تیلور تقریب می‌زند. فرض کنید $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $\boldsymbol{X}^* = \{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$ به‌ترتیب نمونه‌ای مشاهده شده و نمونه بوت‌استرپ

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

باشد. اگر بردار بازنمونه‌گیری بوت‌استرپ را با $\boldsymbol{P^*} = (P_1^*, \dots, P_n^*)'$ که در آن $P_i^* = \frac{N_i^*}{n}$ و N_i^* تعداد مشاهدات بوت‌استرپ که برابر با مشاهده i ام x_i است نشان دهیم، آن‌گاه $n P^*$ دارای توزیع چند جمله‌ای با احتمال‌های $P^\circ = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)'$ است. آمارهٔ مورد نظر به‌صورت $\hat{\theta} = T(P^\circ)$ خواهد بود. تقریب خطای استاندارد $\hat{\theta}$ به‌صورت $\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \dot{T}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ است که در آن $\dot{T}$ به‌صورت $\dot{T}_i = \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{T\left((1-\varepsilon)P^\circ + \varepsilon e_i\right) - T\left(P^\circ\right)}{\varepsilon}$ و e_i i-امین بردار هم رتبه با مختصات $(0,0,\dots,1,0,0,\dots,0)'$ است. فاصلهٔ اطمینان ABC با ضریب $1-\alpha$ به‌صورت $\theta \in \left(\hat{\theta}_{ABC[1-\frac{\alpha}{2}]}; \hat{\theta}_{ABC[\frac{\alpha}{2}]}\right)$ به‌دست می‌آید که در آن $\hat{\theta}_{ABC[1-\frac{\alpha}{2}]} = T\left(P^\circ + \lambda_1 \frac{\hat{\delta}}{\hat{\sigma}}\right)$ و $\hat{\theta}_{ABC[\frac{\alpha}{2}]} = T\left(P^\circ + \lambda_2 \frac{\hat{\delta}}{\hat{\sigma}}\right)$ و همچنین $\lambda_1 = \frac{\hat{Z}_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\left(1 - \hat{a}\left(\hat{Z}_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right)}$ و $\lambda_2 = \frac{\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\left(1 - \hat{a}\left(\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\right)}$ و $\hat{\delta} = \dot{T}(P^\circ)$ هستند.

مطالعهٔ شبیه‌سازی

برای مقایسهٔ میان حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ برای میانگین فرآیند، مطالعهٔ شبیه‌سازی با استفاده از نمونه‌هایی از توزیع‌های نرمال، لگ نرمال و خی‌دو طراحی می‌کنیم. انتخاب این سه توزیع برای بررسی اثر چولگی است، توزیع نرمال به‌عنوان توزیع فاقد چولگی و توزیع‌های لگ نرمال و خی‌دو به‌عنوان توزیع‌های دارای چولگی انتخاب شده‌اند. در این مطالعه شبیه‌سازی اثر چولگی، پارامترهای توزیع و حجم نمونه را بر روی حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ بررسی می‌کنیم. ملاك مقایسهٔ میان حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ میانگین طول فاصلهٔ اطمینان و احتمال پوشش است. روش کار به این صورت است که به‌عنوان مثال برای توزیع نرمال استاندارد در اولین سطر جدول ۱ ابتدا $m=25$ نمونه به حجم $n=5$ تولید می‌کنیم. حدود کنترل شوهارت 3σ برای میانگین فرآیند به‌صورت $UCL = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$ و $CL = \bar{\bar{x}}$ و $UCL = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$ است که در $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i}{m}$ ، $\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{n}$ ، $R = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m}$ و R_i دامنهٔ نمونهٔ n تایی i ام $(i = 1, \dots, m)$ است. همچنین A_2 به ازای اندازه‌های نمونه مختلف از جداول انتهای اکثر کتاب‌های کنترل کیفیت مانند مونتگمری [۷] به‌دست می‌آید. با فرض نرمال بودن مشاهدات ضریب اطمینان این حدود کنترل ۹۹/۸۶ درصد خواهد بود. برای تعیین حدود کنترل به روش بوت‌استرپ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

۱- خط مرکز همان $CL = \bar{\bar{x}}$ حدود کنترل شوهارت برای میانگین است.

۲- تعداد m فاصلهٔ اطمینان ۹۹/۸۶ درصد به‌روش بوت‌استرپ به‌صورت (L_i, U_i) ، $i=1,\dots,m$ محاسبه می‌شود.

۳- حد بالا و پایین نمودار کنترل بر اساس بوت‌استرپ به‌صورت $UCL = \frac{1}{m}\sum_{i=}^{m} U_i$ و $LCL = \frac{1}{m}\sum_{i=}^{m} L_i$ تعیین می‌شود.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

تعداد تکرار روش بوت‌استرپ برای محاسبهٔ فواصل اطمینان $B=1000$ است. برای محاسبهٔ میانگین طول فاصلهٔ اطمینان بوت‌استرپ و حدود کنترل شوهارت و همچنین احتمال پوشش تعداد تکرار شبیه‌سازی‌های مونت‌کارلو را $m=2000$ مرتبه می‌گیریم. نتایج شبیه‌سازی برای سه توزیع نرمال، لگ نرمال و خی‌دو به صورت زیر هستند:

جدول ۱. احتمال پوشش و میانگین طول فاصلهٔ اطمینان برای توزیع نرمال

n	μ	σ	شوهارت	صدکی بوت استرپ	t- بوت استرپ	BCa	ABC
۵	۰	۱	(۰.۹۶)۱.۵۹۶۷۹۴	(۰.۹۶)۱.۳۵۹۷۴۵	(۰.۹۷)۱.۸۵۲۴۶۱	(۰.۹۵)۱.۴۰۸۵۹۱	(۰.۹۴)۱.۴۲۶۷۷۲
		۵	(۰.۹۷)۷.۹۱۹۱۱۸	(۰.۹۷)۶.۷۲۰۵۰۱	(۱۰۰)۷.۹۷۸۳۵۵	(۰.۹۴)۶.۹۶۱۲۳۲	(۰.۹۶)۷.۰۰۴۷۵۳
	۵	۱	(۰.۹۵)۱.۶۲۶۷۹۰	(۰.۹۴)۱.۳۸۷۵۱۸	(۰.۹۸)۱.۷۸۵۵۳۳	(۰.۹۵)۱.۴۳۶۵۰۳	(۰.۹۶)۱.۴۵۲۲۹۲
		۵	(۰.۹۶)۷.۹۸۶۷۲۲	(۰.۹۵)۶.۸۴۸۶۹۹	(۱۰۰)۷.۲۲۱۸۶۵	(۰.۹۶)۷.۰۹۳۸۲۳	(۰.۹۷)۷.۱۵۳۳۳۲
۱۰	۰	۱	(۰.۹۴)۱.۲۴۱۹۶۵	(۰.۹۵)۱.۱۴۱۲۰۷	(۰.۹۷) ۱.۶۶۱۱۱۰	(۰.۹۵)۱.۱۶۰۱۲۴	(۰.۹۶)۱.۱۶۴۲۸۰
		۵	(۰.۹۷)۶.۱۹۵۲۵۲	(۰.۹۶)۶.۶۹۲۹۱۷	(۰.۹۸)۶.۲۹۱۰۵۳	(۰.۹۴)۵.۷۸۹۷۹۷	(۰.۹۶)۵.۸۰۹۲۲۰
	۵	۱	(۰.۹۶)۱.۲۳۹۴۳۵	(۰.۹۴)۱.۱۳۸۶۵۹	(۰.۹۷)۱.۶۶۳۲۰۸	(۰.۹۶)۱.۱۵۸۷۱۸	(۰.۹۵)۱.۱۶۱۹۹۹
		۵	(۰.۹۵)۶.۲۷۳۴۳۱	(۰.۹۶)۵.۷۵۴۴۶۴	(۰.۹۶)۶.۶۰۶۴۱۷	(۰.۹۵)۵.۸۴۸۴۰۴	(۰.۹۶)۵.۸۶۱۱۰۲
۱۵	۰	۱	(۰.۹۴)۱.۰۱۱۳۱۰۵	(۰.۹۵) ۱.۰۰۵۷۵۱۱	(۰.۹۵)۱.۲۴۷۲۷۲۰	(۰.۹۴)۰.۹۶۶۴۲۰۰	(۰.۹۳)۰.۹۶۷۸۰۲۴
		۵	(۰.۹۶)۵.۰۵۱۴۱۲	(۰.۹۵)۵.۷۸۲۲۵۸	(۰.۹۷)۵.۲۲۰۷۶۳	(۰.۹۶)۴.۸۲۶۸۶۰	(۰.۹۵)۴.۸۳۵۳۳۹
	۵	۱	(۰.۹۴)۱.۰۱۱۰۸۸۷	(۰.۹۶)۱.۱۰۵۷۵۳۳۹	(۰.۹۴)۱.۲۴۶۱۵۱۴	(۰.۹۴)۰.۹۶۵۹۵۰۷	(۰.۹۵)۰.۹۶۷۸۳۹۸
		۵	(۰.۹۵)۵.۰۶۶۹۶۵	(۰.۹۶) ۵.۰۷۹۸۱۴	(۰.۹۷)۵.۲۵۳۰۴۶	(۰.۹۶)۴.۸۴۳۸۰۳	(۰.۹۴)۴.۸۵۰۲۳۳

جدول ۲. احتمال پوشش و میانگین طول فاصلهٔ اطمینان برای توزیع لگ نرمال

n	μ	σ	شوهارت	صدکی بوت استرپ	t- بوت استرپ	BCa	ABC
۵	۰	۰.۵	(۱۰۰)۲.۹۸۶۶۷۶۹	(۱۰۰)۲.۷۹۳۲۸۰۲	(۱۰۰)۳.۰۷۳۹۳۰۰	(۰.۹۷)۰.۸۴۷۷۲۰۳	(۰.۹۸)۰.۸۷۳۱۳۶۷
		۱	(۱۰۰)۴.۱۶۷۸۲۱	(۱۰۰)۴.۰۸۷۷۵۱	(۱۰۰)۴.۶۸۱۲۳۴	(۰.۹۶)۲.۳۶۴۶۰۶	(۰.۹۷)۲.۴۶۷۶۵۷
	۱	۰.۵	(۱۰۰)۵.۵۸۰۰۴۳	(۱۰۰)۵.۰۹۸۰۹۷	(۱۰۰)۶.۰۲۸۱۶۵	(۰.۹۷)۲.۲۰۷۳۳۷	(۰.۹۷)۲.۲۶۸۵۲۴
		۱	(۱۰۰)۹.۸۱۸۳۳۷	(۱۰۰)۹.۱۸۷۵۳۶	(۱۰۰)۱۰.۱۶۷۸۱۶	(۰.۹۶)۵.۹۴۶۳۶۰	(۰.۹۶)۵.۲۲۴۴۴۱
۱۰	۰	۰.۵	(۰.۹۹)۰.۹۳۷۹۶۴۸	(۰.۹۹)۰.۹۴۸۷۹۱۵	(۰.۹۷)۱.۰۶۸۱۲۹۹	(۰.۹۷)۰.۶۷۹۸۸۸۴	(۰.۹۸)۰.۶۹۲۹۷۳۴
		۱	(۰.۹۸)۲.۹۵۰۳۵۷	(۰.۹۸)۲.۸۸۸۶۶۸	(۰.۹۷)۳.۴۱۶۲۱۱	(۰.۹۶)۱.۶۲۱۴۲۷	(۰.۹۷)۱.۹۰۸۰۸۹
	۱	۰.۵	(۰.۹۸)۲.۰۰۸۰۱۹	(۰.۹۸)۲.۷۶۲۱۲۳	(۰.۹۸)۲.۹۴۲۳۱۲	(۰.۹۵)۱.۱۴۶۲۹۷	(۰.۹۶)۱.۱۷۱۳۱۹
		۱	(۰.۹۸)۷.۴۸۲۱۰۸	(۰.۹۸)۷.۵۹۴۵۰۴	(۰.۹۷)۷.۸۱۷۱۴۴	(۰.۹۶)۶.۳۴۱۱۴۹	(۰.۹۵)۶.۶۲۲۳۲۷
۱۵	۰	۰.۵	(۰.۹۵)۰.۶۲۶۰۴۳۴	(۰.۹۶)۰.۶۷۴۳۳۳۱	(۰.۹۶)۰.۶۶۵۵۸۹۰	(۰.۹۵)۰.۵۹۹۶۲۹۴	(۰.۹۴)۰.۶۰۶۵۸۳۱
		۱	(۰.۹۶)۲.۲۶۴۹۸۴	(۰.۹۵)۲.۱۲۸۰۳۸	(۰.۹۶)۲.۲۵۴۱۸۹	(۰.۹۴)۱.۹۹۰۸۳۳	(۰.۹۵)۲.۰۶۲۴۹۰
	۱	۰.۵	(۰.۹۴)۱.۶۶۹۹۵۲	(۰.۹۵)۱.۵۳۶۷۸۲	(۰.۹۷)۱.۶۹۳۳۹۹	(۰.۹۴)۱.۶۰۲۳۰۸	(۰.۹۶)۱.۶۱۴۶۹۶
		۱	(۰.۹۶)۵.۵۵۶۱۵۰	(۰.۹۵)۴.۵۴۱۴۴۳	(۰.۹۸)۵.۵۰۴۷۹۳	(۰.۹۶)۵.۱۳۲۵۴۳	(۰.۹۵)۵.۲۷۱۹۳۵

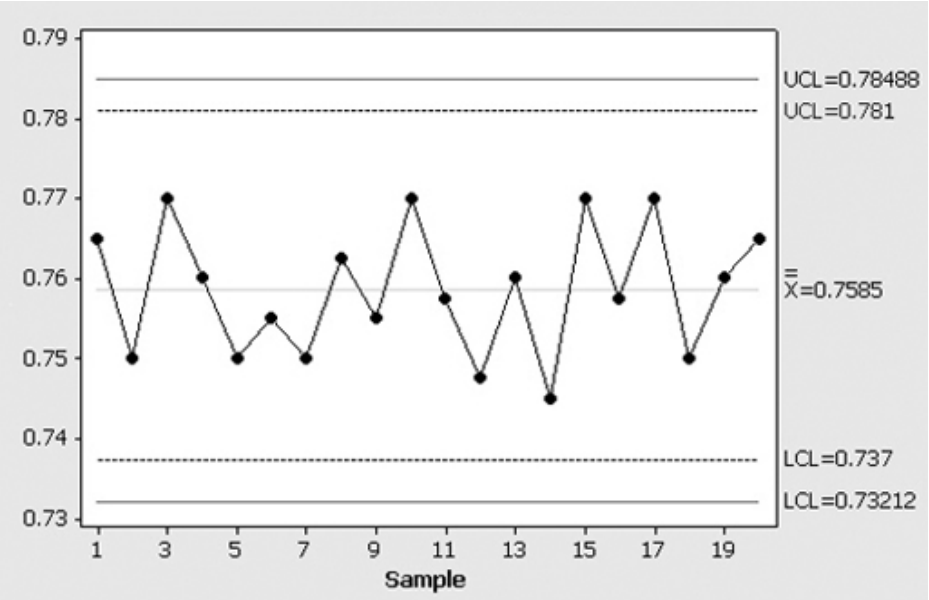
جدول ۳. احتمال پوشش و میانگین طول فاصلهٔ اطمینان برای توزیع خی‌دو

n	ν	λ	شوهارت	صدکی بوت استرپ	t- بوت استرپ	BCa	ABC
۵	۵	۰	(۱۰۰)۷.۰۴۹۹۸۵	(۱۰۰)۷.۱۸۴۹۶۰	(۱۰۰) ۷.۵۴۹۶۵۰	(۰.۹۶)۴.۳۶۰۹۳۸	(۰.۹۷)۴.۴۶۶۱۶۳
		۵	(۱۰۰)۱۰.۷۲۹۶۳۶	(۱۰۰)۱۰.۴۳۷۹۲۱	(۱۰۰)۱۱.۲۹۳۸۶۶	(۰.۹۶)۷.۷۲۳۷۴۰	(۰.۹۶)۷.۵۴۶۵۷۲
	۱۰	۰	(۱۰۰)۹.۳۵۰۶۳۹	(۱۰۰)۹.۱۸۵۷۴۰	(۱۰۰)۱۰.۰۸۶۷۲۰	(۰.۹۵)۶.۴۶۸۸۲۸	(۰.۹۵)۶.۲۶۴۹۰۳
		۵	(۱۰۰)۱۲.۱۲۳۰۱۶	(۱۰۰)۱۲.۵۸۷۸۰۴	(۱۰۰)۱۲.۷۸۷۸۴۱	(۰.۹۷)۸.۸۸۴۰۹۲	(۰.۹۶)۸.۰۳۹۴۶۳
۱۰	۵	۰	(۰.۹۸)۴.۹۷۶۰۴۸	(۰.۹۸)۴.۵۵۰۴۷۷	(۰.۹۶)۴.۷۸۲۳۷۴	(۰.۹۶)۳.۷۲۰۱۲۳	(۰.۹۵)۳.۵۴۸۵۲۳
		۵	(۰.۹۸)۷.۶۸۷۴۱۴	(۰.۹۷)۶.۰۳۶۱۱۱	(۰.۹۷)۷.۰۳۵۳۷۸	(۰.۹۵)۶.۲۳۸۶۶۳	(۰.۹۶)۶.۱۸۱۶۱۰
	۱۰	۰	(۰.۹۸)۶.۵۷۷۷۸۷	(۰.۹۸)۶.۰۶۷۹۶۵	(۰.۹۸)۶.۶۲۸۸۹۴	(۰.۹۶)۵.۲۲۸۶۶۲	(۰.۹۶)۵.۲۲۰۹۹۶
		۵	(۰.۹۶)۸.۷۹۸۹۱۳	(۰.۹۷)۸.۰۸۳۴۰۰	(۰.۹۸)۸.۰۵۸۳۱۷	(۰.۹۷)۷.۵۸۷۴۰۰	(۰.۹۶)۷.۱۱۹۷۹۲
۱۵	۵	۰	(۰.۹۶)۳.۱۸۵۸۰۶	(۰.۹۷)۳.۹۵۵۱۵۲	(۰.۹۶)۳.۴۱۹۰۹۲	(۰.۹۶)۳.۰۵۴۲۷۸	(۰.۹۵)۳.۰۰۸۹۹۷
		۵	(۰.۹۷)۵.۶۹۰۳۱۲	(۰.۹۷)۵.۳۱۲۱۴۴	(۰.۹۸)۵.۹۴۰۴۴۱	(۰.۹۶)۵.۷۶۴۱۰۲	(۰.۹۵)۵.۴۹۴۹۱۲
	۱۰	۰	(۰.۹۶)۴.۴۸۰۶۰۹	(۰.۹۷)۴.۲۱۳۵۶۵	(۰.۹۸)۴.۹۵۴۶۸۷	(۰.۹۷)۴.۷۹۹۹۵۰	(۰.۹۶)۴.۳۱۵۲۵۸
		۵	(۰.۹۵)۶.۲۹۰۶۳۱	(۰.۹۷)۵.۹۱۳۵۴۱	(۰.۹۶)۶.۸۱۱۸۱۷	(۰.۹۶)۶.۰۸۱۷۶۸	(۰.۹۶)۶.۰۴۴۶۱۶

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد هنگامی که به‌طور مثال توزیع جامعه خی‌دو باشد اگر حجم نمونه و درجهٔ آزادی ثابت بماند و فقط پارامتر غیرمرکزی زیاد شود آن‌گاه میانگین طول حدود کنترل شوهارت نسبت به میانگین طول فواصل اطمینان بوت‌استرپ بیش‌تر تغییر می‌کند. اگر حجم نمونه و پارامتر غیرمرکزی ثابت بماند و درجهٔ آزادی زیاد شود باز هم همین اتفاق رخ می‌دهد. اگر درجهٔ آزادی و پارامتر غیرمرکزی ثابت بماند و حجم نمونه زیاد شود، آن‌گاه میانگین طول حدود کنترل شوهارت و میانگین طول فواصل اطمینان بوت‌استرپ به‌هم نزدیک می‌شوند که با توجه به قضیهٔ حد مرکزی انتظار رخ دادن چنین حالتی را داریم. برای توزیع لگ نرمال هم همین تحلیل برقرار است. هنگامی که توزیع جامعه نرمال باشد، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که تفاوتی بین حدود کنترل شوهارت و فواصل اطمینان بوت‌استرپ وجود ندارد، لذا می‌توان از همان حدود کنترل شوهارت استفاده کرد، در نهایت پیشنهاد می‌شود هنگامی که حجم نمونه کوچک و توزیع جامعه غیرنرمال است، با توجه به نتایج شبیه‌سازی شده از فاصلهٔ اطمینان ABC برای برآورد حدود کنترل نمودار میانگین استفاده شود.

مقایسهٔ حدود کنترل شوهارت و بوت‌استرپ ABC



حدود کنترل روش بوت‌استرپ به‌صورت نقطه چین بر روی نمودار مشخص شده است. ملاحظه می‌شود حدود کنترل روش بوت‌استرپ نسبت به حدود کنترل شوهارت به هم نزدیک‌ترند.

داده واقعی

نوشابه یکی از نوشیدنی‌های مورد استفادهٔ مردم است. کنترل میزان مواد جامد محلول در نوشابه یکی از اهداف واحد کنترل کیفیت کارخانجات نوشابه‌سازی است. برخی مواد اولیه مصرفی در نوشابه‌سازی عبارتند از آب، شیرین کننده‌ها و دی‌اکسید کربن. گاز $CO2$ باعث تشدید طعم، افزایش زمان نگهداری، سوزش زبان و کف کردن نوشابه می‌شود. نوشابه باید دمایی کم‌تر از محیط (۷۰ درجه فارنهایت) داشته باشد تا خطر ترکیدگی نداشته

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]

باشد. در این بخش برای کنترل کیفیت گاز $CO2$ در نوشابه‌های کارخانهٔ زمزم اصفهان نمونه‌برداری از خط تولید انجام گرفته است. نمونه‌برداری شامل m=۲۰ نمونه به حجم ۴ =n است. با انجام آزمون کولموگروف-اسمیرنوف بر روی مشاهدات فرض نرمال بودن در سطح ۰/۰۵ رد شد، لذا برای تعیین حدود کنترل از فاصلهٔ اطمینان بوت‌استرپ ABC استفاده می‌کنیم که در آن نتایج به‌صورت $UCL=0.7810$، $CL= 0.7585$ و $LCL= 0.7370$ است. همچنین با فرض نرمال بودن حدود کنترل شوهارت به‌صورت $UCL= 0.7848$، $CL=0.7585$ و $LCL=0.7321$ خواهد بود.

منابع

1. S. M. Bajgier, "The use of bootstrapping to construct limits on control charts", Proceedings of the Decision Science Institute (1992) 1611-1613.
2. B. Efron, "Bootstrap methods: Another look at the jackknife", Annals of Statistics, 7 (1979) 1-26.
3. B. Efron, "Nonparametric standard errors and confidence intervals", Canadian Journal of Statistics, 9 (1981) 139-172.
4. B. Efron, "Better bootstrap confidence intervals (With discussion)", Journal of the American Statistical Association, 82 (1987) 171-200.
5. L. A. Franklin, G. S. Wasserman, "Bootstrap lower confidence limits for capability indices", Journal of Quality Technology, 24 (1992) 196-210.
6. R. Y. Liu, J. Tang, "Control charts for dependent and independent measurements based on bootstrap methods", Journal of American Statistical Association, 91 (1996) 1694-1700.
7. D. C. Montgomery, "Introduction to Statistical Quality Control", (1991) John Wiley.
8. PARK, "HYO-IL Median Control Charts Based on Bootstrap Method", Communications in Statistics-Simulation and Computation, 38 (2009) 558-570.
9. T. Seppala, H. Moskowitz, R. Plante, and J. Tang, "Statistical process control via the subgroup bootstrap", Journal of Quality Technology, 27 (1995) 139-153.
10. S. Teyarachakul, S. Chand, and J. Tang, "Estimating the limits for statistical process control charts: A direct method improving upon the bootstrap", European Journal of Operational Research, 178 (2007) 472-481.
11. Z. Wu, Q. Wang, "Bootstrap control charts, Quality Engineering", 9 (1996) 143-150.
12. M. Wood, M. Kaye, N. Capon, "The use of resampling for estimating control chart limits", Journal of Operational Research, 50 (1999) 651-659.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-28]