

## یادداشتی بر برآوردگر درستنمایی بیشینه تقریبی پارامتریک فرایند $AR(1)$ مبتنی بر یک سری دوتایی و مقایسه آن با برآوردگر درستنمایی بیشینه داده‌های اولیه

حسینعلی نیرومند

گروه آمار - دانشکده علوم - دانشگاه فردوسی (مشهد)

اول  $\{Z_t\}$ 

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t \quad t = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$$

که  $| \phi | < 1$  و  $u_t$  ها متغیرهای تصادفی  $N(0, \sigma^2)$  مستقل اند و در اینصورت  $\{Z_t\}$  یک فرآیند گوسی مانای با میانگین صفر است را در نظر می‌گیریم. حال سری  $\{X_t\}$  را به صورت

$$X_t = \begin{cases} 1 & Z_t \geq 0 \\ 0 & Z_t < 0 \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, n$$

تعریف می‌کنیم و سری حاصل که دنباله‌ای از صفر و یک‌هاست را یک سری دوتایی می‌نامیم که از لحاظ مقدار و پارامتر گسته است و تحلیل بر مبنای آن آسان و سریع خواهد بود. با داشتن سری گسته  $\{X_t\}$  می‌توانیم تعداد گشته‌های ۱ را مشاهده کنیم و در نتیجه اطلاعات در سری به شکل‌گیری انواع مختلف گشته‌ها بستگی دارد. در اینجا فرض بر این است که سری  $\{X_t\}$  یک زنجیر مارکف تشیل می‌دهد زیرا باتوجه به این فرض توزیع توام سری همواره امکان‌پذیر است. در این مقاله در صورت معلوم بودن سری دوتایی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از کمیتهای

$$R = \sum_{t=2}^n X_t X_{t-1} \quad \text{و} \quad S = \sum_{t=1}^n X_t$$

$$\lambda_1 = \Pr(X_t = 1 \mid X_{t-1} = 1)$$
 استفاده می‌کنیم و می‌توان دید که

چکیده:

در این مقاله یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول  $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$  که  $u_t$  ها متغیرهای تصادفی مستقل  $N(0, \sigma^2)$  می‌باشند را در نظر می‌گیریم. این فرآیند را دوتایی کرده و آنرا  $\{X_t\}$  می‌نامیم و باتوجه به این فرض که  $\{X_t\}$  یک زنجیر مارکف می‌سازد. برآورد درستنمایی بیشینه تقریب  $\hat{\phi}$  پارامتر  $\phi$  مبتنی بر سری دوتایی را بدست آورده و آن را با برآوردگر درستنمایی بیشینه متداول مبتنی بر داده‌های اولیه مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی:

فرآیند اتورگرسیو، فرآیند دوتایی، زنجیر مارکف، برآوردگر درستنمایی بیشینه

مقدمه:

هدف این مقاله ارائه کار جدیدی در تحلیل سریهای زمانی است. تحلیلی که خواهیم دید مبتنی بر روشهای شمارش است که منجر به محاسبه سریع برآورد پارامتر یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول می‌شود و زمان محاسبه آن را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد. فرآیند اتورگرسیو مانای مرتبه

$$P(X_{n-1}^{(M)}, X_n^{(M)}) = (1/2)^{n-1} P(X_2 | X_1) P(X_3 | X_2) \dots$$

$$P(X_n | X_{n-1}) = (1/2)^{n-1} (1-\lambda_1)^{2s-2r-x-x} \lambda_1^{(n-1)-(2s-2r-x-x)}$$

با اندک دقت دیده می‌شود که این عبارت به جز یک ثابت  
باتوجه به قضیه فوق و در صورتی که  $X_1$  مارکفی باشد توزیع  
توأم  $X_1, X_2, \dots, X_n$  است. بنابراین این عبارت یک تابع  
درستنمایی تقریبی  $\lambda_1$  است و برآوردگر درستنمایی بیشینه  
تقریبی  $\lambda_1$  عبارت است از  $\left| \frac{(n-1)-(2s-2r-x-x)}{(n-1)} \right|$  که اگر برای  $n$   
بزرگ از  $X_1$  و  $X_n$  صرفنظر کنیم برآوردگر  
(تعداد گشتهای ۱)  $\frac{(n-1)-2}{n-1}$  بدست می‌آید.

## لم ۲ (Cramer. H. (1946))

فرض کنید  $(X, Y)$  دارای یک توزیع نرمال دو متغیری با  
پارامترهای  $EX = EY = 0$  و  $EX = EY = 0$  و  $Var Y = Var X = \sigma^2$  و همبستگی  
 $\rho$  باشد آنگاه  
 $P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1}(\rho)$   
باتوجه به این لم و باتوجه به این که در فرایند اتوگرسیو مرتبه  
اول  $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$  تابع خود همبستگی به صورت

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & K=0 \\ \phi^K & K \neq 0 \end{cases}$$

$$\phi = \sin \pi \left( \lambda_1 \frac{1}{2} \right)$$

است می‌توان دید که

و بالاخره برآورد درستنمایی بیشینه تقریبی  $\phi$  مبتنی بر فرایند

$\{X_t, t=1, 2, \dots, n\}$  عبارتست از

$$\hat{\phi} = \cos \left( \frac{2\pi (1 - \lambda_1)}{n-1} \right)$$

## یک مطالعه شبیه‌سازی

می‌دانیم که برآوردگر بیشینه متداول  $\phi$  در فرایند

اتوگرسیو مرتبه اول  $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$  که از داده‌های اولیه

بدست می‌آید با تغییراتی عبارت است از

(Box & Jenkins (1976))

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^n Z_{t-1} Z_t}{\sum_{t=2}^n Z_t^2}$$

S-R در حقیقت تعداد گشتهای ۱ است.

توزیع توأم سری زمانی دوتایی  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  از زنجیر  
مارکف عبارتست از

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = 1/2 \prod_{i=2}^n \left( \prod_{j=1}^2 I_{ij} I_{i-1,j} \dots I_{1,j} \right)$$

به طوری که حاصل ضرب دوم روی ۲ و ۱ تایی  
 $(y_i, y_{i-1}, \dots, y_1)^{0,1}$  بوده و

$$I_{ij} = \begin{cases} x_i & y_i = 1 \\ 1-x_i & y_i = 0 \end{cases}$$

که در صورتیکه  $P(X_1 = x_1) = 1/2$  این توزیع توزیع هر سری  
زمانی دوتایی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  است.

## قضیه (Yilvisaker, N.D (1965))

اگر  $\{X_t, t=1, 2, \dots, n\}$  سری دوتایی حاصل از  
 $\{Z_t, t=1, 2, \dots, n\}$  یک زنجیر مارکف تشکیل دهد در  
آنصورت توزیع تعداد دفعات تغییر از ۰ به ۱ و بالعکس دو  
جمله‌ای با پارامترهای  $n-1$  و  $1-\lambda_1$  است که  $Pr(Z_1 \geq 0) = 1/2$ .

## تعریف (Malevich, T. L. (1969))

سری  $X_t^{(M)}$  را یک سری  $M$ -dependent گوییم هرگاه  
 $X_1^{(M)}, \dots, X_k^{(M)}$  و  $X_{k+r}^{(M)}, \dots, X_n^{(M)}$  وقتی  $r > M$  مستقل  
باشند.

## لم ۱

اگر  $M \rightarrow 0$  آنگاه  $X_t^{(M)}$  به طور یکنواخت در  $t$  در میانگین  
توانهای دوم به  $X_1$  همگرا است Malevich ثابت می‌کند که  
درستنمایی مبتنی بر  $X_1^{(M)}$  درستنمایی بر پایه  $X_1$  را تقریب  
می‌کند، بویژه برای  $M$  بزرگ و باتوجه به مانایی توزیع توأم  
 $X_1^{(M)}, X_2^{(M)}, \dots, X_{2+M}^{(M)}, X_{3+M}^{(M)}, \dots, X_{(n-1)+M}^{(M)}, X_{n+M}^{(M)}$

که  $r$  عدد صحیح و مثبتی است عبارت است از:

$$P(X_1^{(M)}, X_2^{(M)}, X_{2+M}^{(M)}, X_{3+M}^{(M)}, \dots, X_{(n-1)+M}^{(M)}, X_{n+M}^{(M)}) = P(X_1^{(M)}, X_2^{(M)}) P(X_2^{(M)}, X_3^{(M)}) \dots$$

چون می‌دانیم  $\hat{\phi}$  برآوردگر درستنمایی بیشینه‌ای نیست که از  $\{Z_i, i=1, \dots, n\}$  بدست می‌آید لذا می‌خواهیم بدانیم  $\hat{\phi}$  در مقایسه با برآوردگر درستنمایی بیشینه  $\bar{\phi}$  چقدر خوب است؟ برای انجام این امر با استفاده از شبیه‌سازی  $\hat{\phi}$  را با  $\bar{\phi}$  مقایسه می‌کنیم.

برای هر سه‌تایی  $(\sigma^2, \phi, n)$  ده زوج  $(\hat{\phi}, \bar{\phi})$  را از ده سری به حجم  $n$  شبیه‌سازی شده از یک سری اتورگرسیو مرتبه اول بدست می‌آوریم. نتایج این شبیه‌سازی در جدول (۱) منعکس می‌گردد.

است که در آن  $\hat{\phi}$  و  $\bar{\phi}$  به ترتیب میانگین  $\hat{\phi}$  و  $\bar{\phi}$  حاصل از سری  $\{Z_i\}$  و سری دوتایی  $\{X_i\}$  بوده و  $MSE(\hat{\phi}), MSE(\bar{\phi})$  نیز به ترتیب میانگین توان دوم خطای  $\hat{\phi}$  و  $\bar{\phi}$  از سریهای  $\{Z_i\}$  و  $\{X_i\}$  است. ملاحظه می‌کنیم که متوسط  $\hat{\phi}$  برآورد نقطه‌ای را می‌دهد که به خوبی متوسط  $\bar{\phi}$  است ولی میانگین توان دوم خطای  $\bar{\phi}$  یا مساوی یا میانگین توان دوم  $\hat{\phi}$  است یا قدری از آن کمتر می‌باشد. معه‌ذا برای داده‌های زیاد تفاوت بین دو برآورد قابل اغماض است.

جدول (۱): مقایسه بین برآوردگرهای  $\hat{\phi}$  و  $\bar{\phi}$  متنی بر ده سری به حجم  $n$  از فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

| $u_i \sim N(0, \sigma^2), \text{ که } Z_i = \phi Z_{i-1} + u_i$ |        |     |              |              |                 |                 |
|-----------------------------------------------------------------|--------|-----|--------------|--------------|-----------------|-----------------|
| $\sigma^2$                                                      | $\phi$ | $n$ | $\hat{\phi}$ | $\bar{\phi}$ | $MSE\hat{\phi}$ | $MSE\bar{\phi}$ |
| 25                                                              | 0.8    | 400 | 0.771        | 0.777        | 0.003           | 0.004           |
|                                                                 |        | 600 | 0.780        | 0.789        | 0.001           | 0.002           |
|                                                                 |        | 800 | 0.779        | 0.788        | 0.001           | 0.002           |
|                                                                 | 0.5    | 400 | 0.466        | 0.474        | 0.004           | 0.008           |
|                                                                 |        | 600 | 0.472        | 0.479        | 0.003           | 0.004           |
|                                                                 |        | 800 | 0.471        | 0.480        | 0.002           | 0.004           |
|                                                                 | 0      | 400 | -0.016       | -0.016       | 0.004           | 0.004           |
|                                                                 |        | 600 | -0.019       | -0.037       | 0.002           | 0.004           |
|                                                                 |        | 800 | -0.018       | -0.029       | 0.003           | 0.004           |
| 1                                                               | -0.4   | 400 | -0.392       | -0.371       | 0.004           | 0.007           |
|                                                                 |        | 600 | -0.405       | -0.382       | 0.002           | 0.005           |
|                                                                 |        | 800 | -0.404       | -0.391       | 0.002           | 0.006           |
|                                                                 | 0.8    | 400 | 0.806        | 0.799        | 0.001           | 0.002           |
|                                                                 |        | 600 | 0.801        | 0.801        | 0.000           | 0.002           |
|                                                                 |        | 800 | 0.803        | 0.801        | 0.001           | 0.001           |
|                                                                 | 0.5    | 400 | 0.505        | 0.509        | 0.002           | 0.006           |
|                                                                 |        | 600 | 0.497        | 0.494        | 0.001           | 0.003           |
|                                                                 |        | 800 | 0.500        | 0.490        | 0.001           | 0.002           |
|                                                                 | 0      | 400 | 0.004        | -0.013       | 0.003           | 0.007           |

|     |     |        |        |       |       |       |
|-----|-----|--------|--------|-------|-------|-------|
| 0.4 | 600 | -0.006 | -0.008 | 0.001 | 0.003 | 0.001 |
|     | 800 | -0.002 | 0.006  | 0.001 | 0.004 |       |
|     | 400 | -0.387 | -0.391 | 0.003 | 0.007 |       |
|     | 600 | -0.402 | -0.401 | 0.001 | 0.003 |       |
|     | 800 | -0.400 | -0.397 | 0.001 | 0.003 |       |
|     | 0.8 | 400    | 0.807  | 0.819 | 0.001 |       |
|     | 600 | 0.800  | 0.809  | 0.001 | 0.001 |       |
|     |     |        |        |       | 0.25  |       |
|     | 800 | 0.796  | 0.804  | 0.000 | 0.001 |       |
|     | 0.5 | 400    | 0.512  | 0.525 | 0.002 |       |
|     | 600 | 0.486  | 0.489  | 0.001 | 0.002 |       |
|     | 800 | 0.497  | 0.508  | 0.001 | 0.002 |       |
| 0   | 400 | 0.020  | 0.016  | 0.004 | 0.010 | 0.001 |
|     | 600 | 0.006  | 0.007  | 0.002 | 0.009 |       |
|     | 800 | 0.001  | 0.004  | 0.001 | 0.006 |       |
|     | 400 | -0.412 | -0.407 | 0.001 | 0.002 |       |
|     | 600 | -0.408 | -0.403 | 0.001 | 0.003 |       |
|     | 800 | -0.405 | -0.396 | 0.001 | 0.002 |       |
|     | 0.4 |        |        |       |       |       |
|     |     |        |        |       |       |       |

## REFERENCES

- 1- Box, G. E. P and Jenkins, G. M. (1976), TIME SEPIES Analysis forecasting and control, Holden Day.
- 2- Cramer, H. (1946), mathematical methods of statistics, princeton university press.
- 3- Malevich, T. L. (1969). Asympotic normality of the number of crossings of level zero by a Gaussian process. Theor. Prob. Applic. 14:287-295
- 4- Yilvisaker, N. D. (1965). The expected number of zeros of a stationary gaussian process, Annals Math Statist, 36:1043-1046.

## نتیجه گیری:

ضمن این که داده‌ها را می‌توان تنها در یک آماره S-R منظور کرد که محاسبه آن بینهایت آسان و سریع است، از شبیه‌سازی به عمل آمده چنین برمی‌آید که  $\hat{\phi}$  در مقایسه با  $\hat{\phi}$  برآوردگر نقطه‌ای بسیار خوبی برای  $\phi$  است. این برآوردگر ضمن این که زمان محاسبات را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد و خیلی سریع است بسیار اقتصادی‌تر از برآوردگر مستداول  $\hat{\phi}$  است و تفاوت در دقت این دو برآوردگر قابل صرف نظر کردن است.