

بررسی تداوم روزهای بارانی در حوضه دریاچه ارومیه با استفاده از مدل زنجیره مارکف

دریافت مقاله: ۹۵/۶/۲ پذیرش نهایی: ۹۵/۱۰/۲۰

صفحات: ۱۷۳-۱۹۳

خدیجه جوان: استادیار آب و هواشناسی، گروه جغرافیا، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران^۱

Email: kh.javan@urmia.ac.ir

چکیده

در این پژوهش احتمال تواتر و تداوم روزهای بارانی در حوضه دریاچه ارومیه با استفاده از مدل زنجیره مارکف مرتبه اول مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور از داده‌های بارش روزانه ۷ ایستگاه سینوپتیک حوضه دریاچه ارومیه در بازه زمانی ۲۰۱۴-۱۹۹۵ استفاده شد. پس از تعیین روزهای بارانی (بارش بیشتر از صفر میلی-متر) و خشک (صفر میلی-متر)، انطباق زنجیره مارکف مرتبه اول بر سری داده‌ها با استفاده از آزمون χ^2 در سطح معنی‌داری $\alpha=0/01$ بررسی و مورد تایید واقع شد. پس از تشکیل ماتریس احتمال انتقال، احتمال تعادل، میانگین تداوم روزهای خشک و بارانی و سیکل هوایی محاسبه شد سپس با محاسبه فراوانی روزهای بارانی دو تا ده روزه، احتمال وقوع این دوره‌ها و دوره بازگشت بارش‌های ۲ تا ۵ روزه محاسبه گردید. نتایج نشان داد که در دوره مورد مطالعه به طور میانگین ۲۵ درصد روزها همراه با بارندگی بوده و در حالت‌های انتقال شرطی بارندگی، احتمال وقوع حالت P_{dd} بیشتر از سایر حالت‌ها (P_{dw} ، P_{wd} ، P_{ww}) است. میانگین تداوم روزهای بارانی در حوضه در حدود دو روز برآورد گردید. در کل، در تمام ایستگاه‌ها احتمال تعادل حالت خشک بیشتر از حالت بارانی بود. برآورد فراوانی و احتمال وقوع دوره‌های بارانی دو تا ده روزه و دوره بازگشت آنها نشان داد که با افزایش طول دوره‌ها، از فراوانی روزهای بارانی کاسته شده و با افزایش طول دوره‌های بارانی، احتمال وقوع آنها کاهش و دوره بازگشت آن نیز افزایش یافته است.

کلید واژگان: روزهای بارانی، احتمال وقوع، مدل زنجیره مارکف، حوضه دریاچه ارومیه

^۱. نویسنده مسئول: ارومیه، خیابان والفجر، دانشکده ادبیات و علوم انسانی دانشگاه ارومیه، گروه جغرافیا

مقدمه

بارش یکی از عناصر پیچیده و حیاتی اتمسفر زمین محسوب می‌گردد و تغییرات زمانی و مکانی آن می‌تواند ویژگی‌های محیطی هر ناحیه جغرافیایی را کنترل کند. از اینرو بسیاری از اقلیم‌شناسان، بارش را به عنوان مهم‌ترین پدیده جوی تلقی می‌کنند، زیرا فرآیند بارش با سامانه‌های سینوپتیک جوی، تبادلات انرژی بین سطح زمین و هوا و اقیانوس‌ها مرتبط می‌باشد (رسولی، ۱۳۹۰: ۱۱۷). بارش با تغییرات زمانی و مکانی زیاد، در چرخه هیدرولوژی نقش اصلی را ایفا می‌کند. بنابراین، اندازه‌گیری و برآورد دقیق آن در مطالعات کاربردی اهمیت زیادی دارد و در زمینه‌های مختلفی مانند تغییر اقلیم، پیش‌بینی شرایط جوی، مدل‌سازی اقلیمی، خشکسالی، طراحی سازه‌های هیدرولیک، مطالعه رواناب، آب‌های زیرزمینی، پیش‌بینی سیلاب و مدل‌سازی آن، مطالعات کشاورزی و مدیریت منابع آب مورد استفاده محققان قرار می‌گیرد.

از آنجایی که بارشهای ایران دارای تغییر پذیری بالایی هستند با مطالعه و شناخت رفتارها و احتمال وقوع یا عدم وقوع بارش، می‌توان مدیریت مربوط به منابع آبی را بهبود بخشید. نوسانات شدید بارش سبب شده که اقلیم‌شناسان به دنبال روشهایی برای بررسی رفتار بارش و پیش‌بینی احتمال وقوع آن باشند. به طور کلی دو طریق عمده برای پیش‌بینی پدیده‌های آب و هوایی ارائه شده است: ۱. استفاده از قوانین دینامیکی حاکم بر اتمسفر (مدلهای گردش عمومی جو)؛ ۲. مدل‌های آماری که عمدتاً فیزیک پدیده تحت بررسی را مورد توجه قرار نمی‌دهند و تنها بر تعیین ارتباط بین ورودی‌ها و خروجی‌ها تاکید دارند. این دسته از مدل‌ها از نظر سهولت استفاده بر مدل‌های قبلی برتری دارند (یوسفی و همکاران، ۱۳۸۶: ۱۲۱).

بررسی‌های آماری به روش‌های مختلف از جمله تحلیل سری‌های زمانی، همبستگی خطی و غیر خطی، مدل‌های ARIMA و استفاده از توزیع‌های آماری شناخته شده نظیر توزیع نرمال، گمبل و پیرسون انجام می‌گیرد. در میان روش‌های آماری، مدل زنجیره مارکف در علوم جوی در سال‌های اخیر مورد توجه جدی قرار گرفته است:

مهروتا و شارما^۱ (۲۰۰۶) وقوع اتفاقی بارش روزانه در مقیاس‌های زمانی مختلف (ساعت، روز، هفته، ماه و سال) ۳۰ ایستگاه در اطراف سیدنی استرالیا را با استفاده از مدل زنجیره مارکف بررسی کرده، و به این نتیجه رسیدند که توانایی مدل مارکف در برآورد دوره‌های خشک و تر بلندمدت و کوتاه مدت در مکان‌های مختلف بستگی به ویژگی بارش در مکان خاص دارد. لنارسون و همکاران^۲ (۲۰۰۸) مدل‌سازی بارش را با استفاده از زنجیره مارکف چندگانه در سوئد

^۱ - Mehrotra & Sharma

^۲ - Lennartsson et al

انجام دادند. آنها همچنین از روش گوسن به صورت ترکیبی از توزیع تجربی برای مقادیر بارش کمتر از حد آستانه و توزیع پارتو برای مقادیر بارندگی بیش از حد آستانه استفاده کردند. نتایج تحقیق آنها نشان می‌دهد که توزیع شاخص‌های مدل شده و داده‌های تجربی همپوشانی خوبی دارد. داستیدار و همکاران^۱ (۲۰۱۰) از مدل زنجیره مارکف برای شبیه سازی باران‌های موسمی بنگال هند استفاده کردند. آنها از تئوری بیز تجربی برای تعیین مرتبه مدل زنجیره مارکف استفاده کردند. نتایج نشان داد که مرتبه سوم مدل زنجیره مارکف بهترین توصیف الگوی بارش را دارا می‌باشد. داش^۲ (۲۰۱۲) به مدلسازی بارش روزانه اودیشا در هند با مدل زنجیره مارکف و با استفاده از توزیع گامبل پرداخت و به این نتیجه رسید که مدل زنجیره مارکف مرتبه اول می‌تواند روزهای مرطوب را به خوبی برآورد نماید. یوسف و همکاران^۳ (۲۰۱۴) به بررسی توزیع بارش سالانه در نیجریه با استفاده از مدل زنجیره مارکف چهار حالتی و ارتباط آن با تولید محصولات کشاورزی پرداختند. آنها به این نتیجه رسیدند که در دراز مدت ۱۴ درصد از میزان بارش سالانه باید بارش خفیف، ۳۴ درصد بارش متوسط (پراکنده در طول سال)، ۴۷ درصد بارش شدید و ۵ درصد بارش متوسط (متمرکز) باشد. ملج و همکاران^۴ (۲۰۱۳) احتمال تداوم بارش در حوضه آبریز بیا^۵ در دو کشور غنا و ساحل عاج را بررسی کردند. آنها ابتدا دوره‌های خشکسالی را برای حوضه محاسبه کرده سپس احتمال تواتر و تداوم خشکسالی را با استفاده از مدل زنجیره مارکف به دست آوردند. آنها سه روند اقلیمی از ۱۹۰۱ تا ۲۰۰۹ را شناسایی کردند: دوره مرطوب از ۱۹۰۱ تا ۱۹۴۵، دوره نرمال از ۱۹۴۶ تا ۱۹۷۰ و دوره خشک از ۱۹۷۱ تا ۲۰۰۹. نتایج استفاده از زنجیره مارکف نیز نشان داد که تداوم دوره خشک دو ساله در حوضه بیشتر است. رحیم و همکاران^۶ (۲۰۱۵) به بررسی الگوی توزیع بارش در نیجریه با استفاده از مدل زنجیره مارکف سه حالتی پرداختند. آنها هر سال را به سه دوره قبل از بارش‌های موسمی، بارش‌های موسمی و بعد از بارش‌های موسمی تقسیم کرده و دوره تداوم بارش‌های هر دوره را محاسبه نمودند. الام و همکاران^۷ (۲۰۱۵) احتمال وقوع هفته‌های خشک و مرطوب را در سه ناحیه در معرض خشکسالی هند با استفاده از زنجیره مارکف بررسی کردند. ماکوکا و همکاران^۸

^۱ - Dastidar et al

^۲ - Dash

^۳ - Yusuf et al

^۴ - Meledje et al

^۵ - Bia

^۶ - Raheem et al

^۷ - Alam et al

^۸ - Makokha et al

(۲۰۱۶) احتمال وقوع و طول دوره‌های خشک، مرطوب و بارانی را در کنیا با استفاده از مدل زنجیره مارکف سه حالتی بررسی نمودند.

در ایران نیز پژوهش‌های زیادی با بهره‌گیری از مدل زنجیره مارکف به انجام رسیده است. حجازی‌زاده و شیرخانی (۱۳۸۴) دوره‌های خشک کوتاه مدت در استان خراسان را با استفاده از زنجیره مارکف مورد بررسی قرار دادند و در نهایت نتیجه گرفتند که میانگین وقوع روزهای خشک در تمام فصول، بیست روز و بالاتر از آن می‌باشد. کردوانی و همکاران (۱۳۸۵) با استفاده از مدل زنجیره مارکف به بررسی دوره‌های تر و خشک تهران (مهرآباد) پرداختند و به این نتیجه رسیدند که توانایی این مدل در پیش بینی دوره‌های مرطوب در مناطق ناهنجار از نظر بارش نظیر تهران با احتمال ۹۵ درصد می‌تواند مفید باشد. رضیئی و همکاران (۱۳۸۶) با استفاده از مدل زنجیره مارکف مرتبه اول و شاخص SPI در مقیاس ۳ و ۶ ماهه، احتمال وقوع و گسترش خشکسالی سیستان و بلوچستان را مورد بررسی قرار دادند. یوسفی و همکاران (۱۳۸۶) به برآورد احتمال خشکسالی و ترسالی در قزوین با استفاده از مدل زنجیره مارکف و توزیع نرمال پرداخته و به این نتیجه رسیدند که زنجیره مارکف نتایج بهتری نسبت به توزیع نرمال دارد. عساکره (۱۳۸۷) تواتر و تداوم روزهای بارانی در شهر تبریز را با استفاده از مدل زنجیره مارکف بررسی و سپس احتمال پایا و دوره بازگشت روزانه هر یک از دو حالت بارش - خشکی را برآورد کرده و بیشترین احتمال وقوع روزهای بارانی را در فصل بهار به دست آورده است. عساکره و مازینی (۱۳۸۹) احتمال روزهای بدون بارش و نیز روزهای با بارش کمتر از یک میلی متر را برای استان گلستان محاسبه و مورد تحلیل قرار دادند. نتایج پژوهش حاکی از آن بود که احتمال تداوم روزهای خشک در ناحیه پرباران جنوبی بسیار کمتر از روزهای مشابه در ناحیه کم باران شمالی است. جلالی و همکاران (۱۳۹۰) احتمال وقوع روزهای بارانی در شهر ارومیه را با استفاده از مدل زنجیره مارکف بررسی کرده و به این نتیجه رسیدند که بیشترین احتمال وقوع روزهای بارش در بهار به ویژه ماه آوریل است که احتمال دوره بازگشت دو و سه روزه باران برابر با $4/4$ و ۱۳ روز می‌باشد. سلیقه و همکاران (۱۳۹۰) به بررسی بارش فصول مرطوب در استان اردبیل با استفاده از مدل زنجیره مارکف پرداختند. نتایج تحقیق آنها نشان داد که نسبت دوره‌های خشک به کل دوره مورد مطالعه بسیار زیاد و دوره‌های خشک و مرطوب کوتاه مدت بیشتر از دوره‌های خشک و مرطوب بلندمدت اتفاق می‌افتد. بختیاری و همکاران (۱۳۹۳) به برآورد احتمالات بارش روزانه با استفاده از مدل زنجیره مارکف در اقلیم - های مختلف ایران پرداختند. آنها همچنین نقشه‌های خطوط هم احتمال طول موسم خشک را ترسیم نمودند. نتایج تحقیق آنها نشان می‌دهد که داده‌های بارندگی روزانه ایستگاه‌های مورد

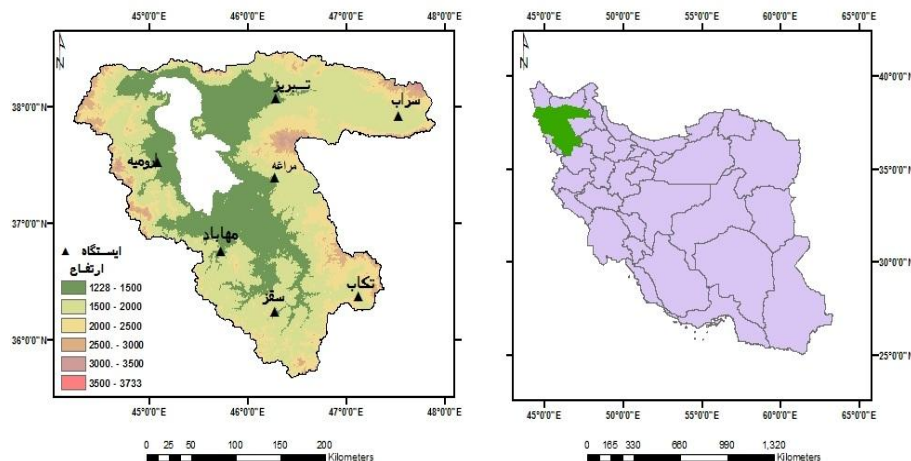
مطالعه برازش خوبی بر زنجیره مارکف مرتبه اول دارد. خورشیددوست و فخاری (۱۳۹۵) به بررسی احتمال تواتر و تداوم روزهای بارانی در جنوب غرب ایران با استفاده از مدل زنجیره مارکف پرداختند. نتایج تحقیق آنها نشان می‌دهد که کم‌ترین احتمال بارش در مناطق هموار و بیش‌ترین احتمال بارش در مناطق کوهستانی است.

تعیین ویژگی‌های خشک و تر هر منطقه، پایداری و احتمال وقوع هر یک از این دوره‌ها، نیاز اساسی برنامه‌ریزی‌های محیطی به ویژه برنامه‌ریزی برای مدیریت منابع آب را نشان می‌دهد. از این رو شناخت رفتار و احتمال بارندگی همراه با توزیع زمانی و مکانی آن می‌تواند به توان مدیریتی منابع آبی در منطقه کمک شایانی نماید. از این رو هدف تحقیق حاضر تعیین احتمال رخداد روزهای بارانی در حوضه دریاچه ارومیه و بررسی تداوم و دوره بازگشت این روزها با استفاده از مدل زنجیره مارکف می‌باشد.

داده‌ها و روش کار

منطقه مورد مطالعه

حوضه آبریز دریاچه ارومیه با وسعت حدود ۵۱۸۰۱ کیلومتر مربع بین مختصات $35^{\circ}40'$ تا $38^{\circ}30'$ عرض شمالی و $44^{\circ}14'$ تا $47^{\circ}53'$ طول شرقی واقع شده است. این حوضه در شمال غربی ایران قرار گرفته و بوسیله بخش شمالی کوه‌های زاگرس، دامنه جنوبی کوه سبلان و دامنه‌های شمالی، غربی و جنوبی کوه سهند احاطه شده است. این حوضه از سمت شمال به حوضه آبریز رودخانه ارس، از سمت شرق به حوضه آبریز رودخانه سفیدرود، از جنوب به حوضه آبریز رودخانه‌های سفیدرود و سیروان و از غرب به حوضه آبریز رودخانه زاب محدود گشته است. حوضه دریاچه ارومیه با دارا بودن حدود ۳/۱۵ درصد از سطح کشور، حدود ۷ درصد از کل منابع آب سطحی کشور را به خود اختصاص می‌دهد (مطالعات پایه منابع آب، ۱۳۸۷: ۱). موقعیت جغرافیایی منطقه مورد مطالعه و پراکنش مکانی ایستگاه‌های هواشناسی مورد استفاده در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱). موقعیت جغرافیایی حوضه آبریز دریاچه ارومیه و ایستگاه‌های مورد مطالعه

در این تحقیق از داده‌های بارش روزانه هفت ایستگاه سینوپتیک واقع در حوضه دریاچه ارومیه در فاصله زمانی ۱۹۹۵ تا ۲۰۱۴ استفاده شده است. مشخصات جغرافیایی و ارتفاع ایستگاه‌های هواشناسی انتخاب شده در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول (۱). مشخصات ایستگاه‌های مورد مطالعه در حوضه دریاچه ارومیه

ردیف	نام ایستگاه	ارتفاع (متر)	عرض جغرافیایی*	طول جغرافیایی
۱	ارومیه	۱۳۲۸	۳۷/۵۳	۴۵/۰۸
۲	تبریز	۱۳۶۱	۳۸/۰۸	۴۶/۲۸
۳	تکاب	۱۸۱۷/۲	۳۶/۳۸	۴۷/۱۱
۴	سراب	۱۶۸۲	۳۷/۹۳	۴۷/۵۳
۵	سقز	۱۵۲۲/۸	۳۶/۲۵	۴۶/۲۶
۶	مراغه	۱۳۴۴	۳۷/۴۰	۴۶/۲۶
۷	مهاباد	۱۳۵۲	۳۶/۷۶	۴۵/۷۱

مدل‌های زنجیره مارکف از جمله فرایندهای تصادفی هستند که در شبیه سازی و مدل سازی سریهای زمانی گسسته کاربرد گسترده‌ای دارند وابستگی متغیرهای تصادفی به زمان در سری-های زمانی از طریق ضریب خودهمبستگی یا ماتریس‌های احتمال انتقال بیان می‌شوند (آشگرطوسی و همکاران، ۱۳۸۲: ۸۴). در تعیین حالت سیستم باید دو عامل را مشخص کرد: حالت سیستم در زمان مشخص و احتمال تغییر حالت خاص به حالت‌های ممکن دیگر که

اصطلاحاً احتمال انتقال (گذار) نامیده می‌شود (مومنی، ۱۳۷۴: ۱۲). ماتریس احتمال انتقال، ماتریس مربعی است که بسته به تعداد حالت‌های آن، تعداد n ترکیب ممکن از احتمال انتقال از حالتی به حالت دیگر را در بر می‌گیرد. مدل زنجیره مارکف بر اساس تعداد حالت‌ها و احتمال‌های انتقال از حالت i به حالت j (P_{ij}) شناخته می‌شود. احتمال انتقال بیانگر احتمال قرار گرفتن سیستم در یکی از حالت‌های ممکن در گام زمانی آینده می‌باشد. مدل زنجیره مارکف مرتبه اول، اصلی‌ترین شکل مدل زنجیره مارکف به حساب می‌آید. زنجیره مارکف مرتبه اول عبارت است از یک سری زمانی گسسته که در آن، رفتار سری در گام زمانی آینده تنها به حال بستگی دارد نه به گام‌های زمانی گذشته. مدل زنجیره مارکف مرتبه اول به شکل زیر بیان می‌گردد (رضیئی و همکاران، ۱۳۸۶: ۸۲):

$$P\{X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-n}\} = p\{X_{t+1} | X_t\} \quad \text{رابطه ۱}$$

که در آن: p ، احتمال وقوع حالت X_{t+1} به شرط وقوع حالت X_t ، X متغیر حالت و t گام زمان می‌باشد.

تعداد متغیرها در زنجیره مارکف می‌تواند از دو تا N حالت تغییر یابد. در اقلیم شناسی و هیدرولوژی، زنجیره مارکف دو یا سه حالت به بیشترین کاربرد را دارد (ویلکز، ۱۹۹۵). اگر حالت‌های ممکن برای سری زمانی روزهای بارانی در این مطالعه، خشک (D) و بارانی (W) در نظر گرفته شود، وضعیت محیط در گام بعدی می‌تواند با درصدی از احتمال، هر یک از حالت‌های D و W باشد. با مشخص شدن عناصر ماتریس، احتمال انتقال برخی از ویژگی‌های مهم سری داده‌ها به صورت زیر محاسبه شد:

الف: فراوانی وقوع هر یک از حالت‌های دوگانه (روزهای بارانی و خشک) و تغییر حالت‌ها نسبت به هم محاسبه شد. و ماتریس فراوانی انتقال به صورت زیر از روی سری داده‌های گسسته تعیین شد:

$$N = \begin{bmatrix} N_{dd} & N_{dw} \\ N_{wd} & N_{ww} \end{bmatrix}$$

در این ماتریس، N_{dd} تغییر وضعیت از خشکی به خشکی، N_{dw} تغییر وضعیت از خشکی به بارانی، N_{wd} تغییر وضعیت بارانی به خشکی و N_{ww} تغییر وضعیت بارانی به بارانی را نشان می‌دهد.

ب- ماتریس احتمال انتقال سری به روش درست نمایی پیشینه محاسبه شد:

$$P = \begin{bmatrix} P_{dd} & P_{dw} \\ P_{wd} & P_{ww} \end{bmatrix}$$

روابط استفاده شده برای محاسبه احتمال انتقال ۴ حالت شرطی به شرح زیر است:

$$P_{dd} = \frac{N_{dd}}{N_{dd} + N_{dw}} \quad \text{رابطه ۲}$$

$$P_{dw} = \frac{N_{dw}}{N_{dd} + N_{dw}} \quad \text{رابطه ۳}$$

$$P_{wd} = \frac{N_{wd}}{N_{ww} + N_{wd}} \quad \text{رابطه ۴}$$

$$P_{ww} = \frac{N_{ww}}{N_{ww} + N_{wd}} \quad \text{رابطه ۵}$$

روابط بالا به ترتیب احتمال انتقال از حالت خشک به خشک P_{dd} ، خشک به بارانی P_{dw} ، بارانی به خشک P_{wd} و بارانی به بارانی P_{ww} را نشان می‌دهند.

ج- پس از تعیین ماتریس احتمال انتقال لازم است برازش مدل زنجیره مارکف را بر سری داده ها بررسی نمود. برای این منظور از آزمون کای دو (χ^2) استفاده می‌شود. فرضیه صفر (H_0) این آزمون دال بر استقلال داده‌ها و فرضیه مخالف (H_1) حاکی از وابستگی زمانی متوالی (یا تبعیت از زنجیره مارکف مرتبه نخست) داده‌ها است. به عبارت دیگر بایستی آزمون نمود که آیا بین داده‌های متوالی همبستگی معنی داری وجود دارد یا خیر. آماره این آزمون به صورت زیر است:

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad \text{رابطه ۶}$$

که در آن n_{ij} و e_{ij} به ترتیب فراوانی‌های انتقال مشاهده شده و مورد انتظار در گذر از حالت i به حالت j است. χ^2 محاسبه شده از فرمول فوق با χ^2 جدول با درجه آزادی $df = (r-1)(c-1)$ و سطح معنی داری مقایسه می‌شود. اگر χ^2 محاسبه شده از χ^2 جدول بزرگتر باشد فرضیه صفر (H_0) رد می‌شود (عساکره، ۱۳۸۷: ۵۲).

د- احتمال تعادل برای هر یک از حالت‌های بارانی و خشک با استفاده از مقادیر احتمال انتقال شرطی محاسبه گردید (صادقی‌نیا و همکاران، ۱۳۹۲: ۷۱):

$$P_D^* = \frac{P_{dd} + P_{wd}}{N} \quad \text{رابطه ۷}$$

$$P_W^* = \frac{P_{ww} + P_{dw}}{N} \quad \text{رابطه ۸}$$

P_D^* احتمال تعادل حالت خشک، P_W^* احتمال تعادل حالت بارانی، P_{dd} ، P_{dw} ، P_{wd} و P_{ww} عناصر ماتریس احتمال انتقال و N تعداد کل احتمالات ممکن از یک حالت به حالت دیگر می‌باشد.

ه- امید ریاضی یا میانگین تداوم روزهای خشک و بارانی مشخص شد (Moon et al., 1994: 1012):

$$E_D = \frac{1}{1 - P_{dd}} \quad \text{رابطه ۹}$$

$$E_W = \frac{1}{1 - P_{ww}} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

در این روابط E_D گویای میانگین تداوم روزهای خشک و E_W نشان‌دهنده میانگین تداوم روزهای بارانی است.

و- مجموع طول دو دوره پیاپی بارانی و خشک را یک سیکل هوایی گویند. هر سیکل هوایی (E_C) نشان‌دهنده یک دوره بارانی با یک دوره خشک است که پشت سر هم قرار می‌گیرند (Moon et al., 1994: 1012):

$$E_C = E_D + E_W \quad \text{رابطه ۱۱}$$

ز- احتمال وقوع دوره‌های یک تا ده روزه دوره‌های بارانی پیش‌بینی شد. یکی از قابلیت‌های مدل زنجیره مارکف این است که می‌تواند دوره‌های n روزه حالت‌های گوناگون را برآورد نماید. احتمال وقوع دوره n روزه بارانی از طریق فرمول رابطه (۱۲) بدست می‌آید (رحیمی و همکاران، ۱۳۹۲: ۸۳):

$$P_{(n)} = P_{ww}^{n-1} \times P_{wd} \quad \text{رابطه ۱۲}$$

ح- فراوانی وقوع دوره‌های یک تا ده روزه دوره‌های بارانی با استفاده از فرمول رابطه (۱۳) برآورد شد (حجازی‌زاده و شیرخانی، ۱۳۸۴، ۱۸):

$$W_n = 1 + \frac{(N-n)p_{wd} \cdot p_{dw} (1-p_{wd})^{n-1}}{p_{wd} + p_{dw}} \quad \text{رابطه ۱۳}$$

W_n : تعداد دوره‌های n روزه بارانی در یک دوره معین، N : تعداد کل روزهای دوره آماری، n : طول دوره روزهای بارانی (۱ روزه، ۲ روزه، ۳ روزه و ...)، p_{wd} و p_{dw} عناصر ماتریس احتمال انتقالی زنجیره مارکف.

ط- دوره بازگشت n روزه دوره‌های بارانی از رابطه رابطه (۱۴) به‌دست آمد (عساکره، ۱۳۸۷: ۵۴):

$$T_n = \frac{1}{p^{n-1}(1-p)} \quad \text{رابطه ۱۴}$$

در اینجا T_n دوره بازگشت بارش m روزه، P احتمال تعادل روز بارانی و n دوره بارانی مورد نظر طی n روز است.

اگر چه مدل زنجیره مارکف مرتبه دوم و سوم نیز می‌تواند جهت تحلیل روزهای بارانی مورد استفاده قرار گیرد، مطالعات مختلف (رحمان^۱، ۱۹۹۹؛ دنی و همکاران^۲، ۲۰۰۹ و سونادارا و جی‌واردن^۳، ۲۰۱۵) نشان داده‌اند که استفاده از این مدل‌ها هیچ مزیتی ندارد و مدل مرتبه اول

1 - Rahman

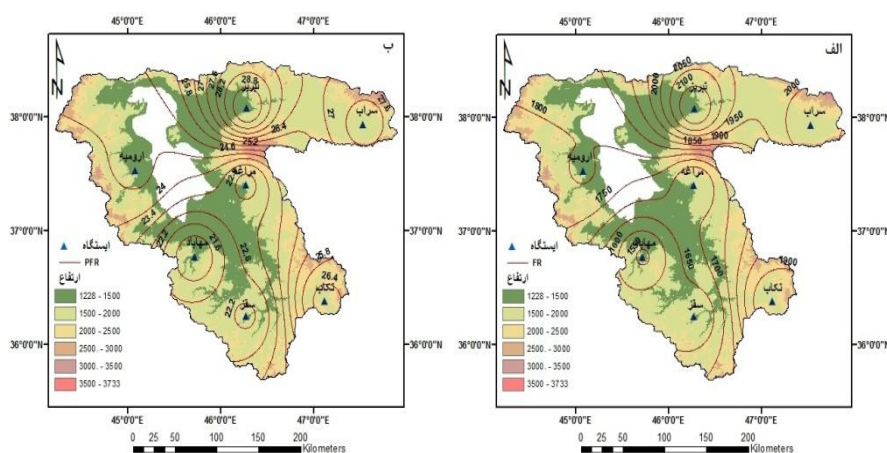
2 - Deni et al

3 - Sonnadara and Jayewardene

برای تحلیل بارش کافی است. بنابراین در این تحقیق نیز از مدل مارکوف مرتبه اول استفاده شده است.

یافته‌های تحقیق

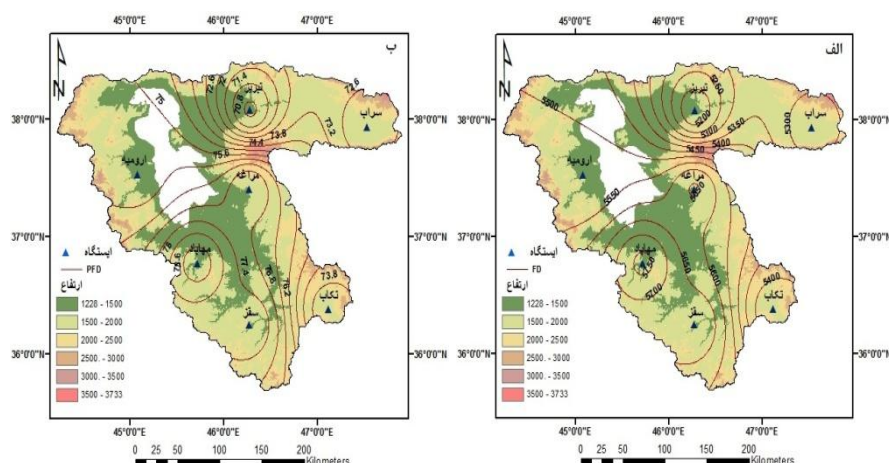
در این پژوهش برای بررسی احتمال تواتر و تداوم روزهای بارانی در حوضه دریاچه ارومیه، ابتدا فراوانی روزهای بارانی و خشک و درصد هر یک از آنها برای ایستگاه‌های مورد مطالعه محاسبه گردید (شکل ۲ و ۳). هدف از تحلیل درصد فراوانی وقایع، بدست آوردن احتمال وقوع یک پدیده مانند دو روز بارانی متوالی است. بررسی اشکال نشان می‌دهد که در دوره مورد مطالعه بین ۲۰ تا ۳۰ درصد روزها همراه با بارندگی می‌باشد. بیشترین فراوانی روزهای بارانی در شمال منطقه و مربوط به ایستگاه تبریز و بیشترین فراوانی روزهای خشک در قسمت جنوب غربی و مربوط به ایستگاه مهاباد می‌باشد.



شکل (۲). فراوانی (الف) و درصد فراوانی روزهای بارانی (ب) ایستگاه‌های حوضه دریاچه ارومیه

بر مبنای دو حالت بارانی و خشک، تعداد حالت‌های انتقال شرطی برای سری‌های زمانی بارندگی در ایستگاه‌های مورد مطالعه شمارش شد. ماتریس فراوانی انتقال مشاهده شده در سمت راست جدول ۲ آورده شده است. در این جدول فراوانی تغییر وضعیت از روز بارانی به بارانی در ایستگاه تبریز با ۱۱۷۴ روز بیش‌ترین و ایستگاه مهاباد با ۷۶۷ روز کمترین مقدار را دارا هستند. به طور کلی ایستگاه‌هایی چون مهاباد، سقز و مراغه که در جنوب حوضه واقع شده‌اند دارای احتمال وقوع بارندگی کمتری نسبت به سایر مناطق هستند. در تمام ایستگاه‌ها به جز سراب، فراوانی روزهای بارانی به بارانی از فراوانی روزهای بارانی به خشک بیشتر است.

بزرگ‌تر بودن تغییر وضعیت و فراوانی روزهای بارانی به بارانی نسبت به روزهای بارانی به خشک نشان‌دهنده تداوم بیش‌تر بارش در این مناطق است. جهت ارزیابی ماتریس تغییر حالت مارکوفی از آزمون χ^2 استفاده شده است. نتایج برازش مدل زنجیره مارکف مرتبه اول دوحالته بر داده‌های بارندگی ایستگاه‌های حوضه دریاچه ارومیه در سمت چپ جدول ۲ آورده شده است. بررسی جدول مذکور نشان می‌دهد که در تمام ایستگاه-ها آزمون کای مربع، برازش مدل مارکف را بر داده‌های بارندگی با سطح اطمینان ۹۹٪ تایید می‌کند زیرا مقدار χ^2 محاسبه شده بسیار بزرگ‌تر از χ^2 نظری در سطح اطمینان ۹۹٪ است. این بدان معنی است که فراوانی حالات از زنجیره مارکف دو حالتی پیروی می‌کند.



شکل (۳). فراوانی (الف) و درصد فراوانی روزهای خشک (ب) ایستگاه‌های حوضه دریاچه ارومیه
 جدول (۲). آزمون χ^2 برای ارزیابی برازش مدل زنجیره مارکف مرتبه نخست بر داده‌های بارندگی
 حوضه دریاچه ارومیه

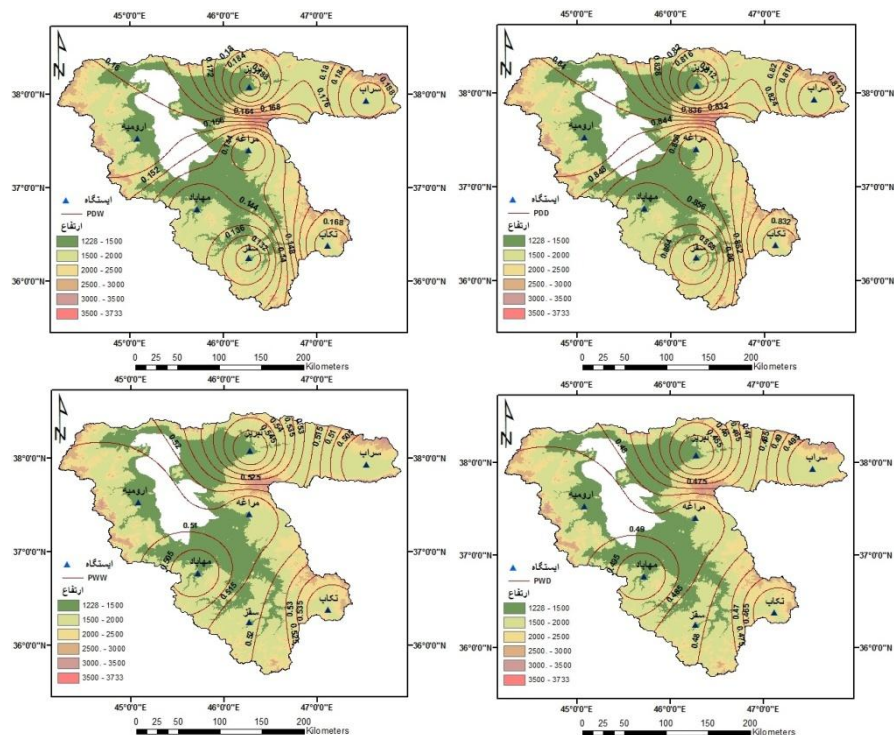
χ^2 نظری	χ^2 محاسبه به شده	ماتریس فراوانی انتقال مورد انتظار				ماتریس فراوانی انتقال مشاهده شده				ایستگاه
		E_{ww}	E_{wd}	E_{dw}	E_{dd}	N_{ww}	N_{wd}	N_{dw}	N_{dd}	
۶/۶	۷۸۷/۷	۴۴۵/۱	۱۳۵۷/۹	۱۳۵۷/۹	۴۱۴۳/۱	۹۲۳	۸۸۰	۸۸۰	۴۶۲۱	ارومیه
۶/۶	۵۳۸/۴	۶۲۸/۸	۱۵۱۴/۲	۱۵۱۴/۲	۳۶۴۶/۸	۱۱۷۴	۹۶۹	۹۶۹	۴۱۹۲	تبریز
۶/۶	۶۵۱/۳	۵۱۵/۸	۱۴۲۵/۲	۱۴۲۵/۲	۳۹۳۷/۸	۱۰۴۳	۸۹۸	۸۹۸	۴۴۶۵	تکاب
۶/۶	۶۹۳/۳	۵۶۳/۹	۱۴۶۵/۱	۱۴۶۵/۱	۳۸۰۸/۹	۱۰۱۴	۱۰۱۶	۱۰۱۵	۴۲۵۹	سراب
۶/۶	۸۵۷/۹	۳۵۵/۳	۱۲۵۵/۷	۱۲۵۵/۷	۴۴۳۷/۳	۸۴۳	۷۶۸	۷۶۸	۴۹۲۵	سقز
۶/۶	۸۶۸/۸	۳۷۲/۹۷	۱۲۷۸/۰۳	۱۲۷۷/۰۳	۴۳۷۵/۹۷	۸۴۸	۸۰۳	۸۰۲	۴۸۵۱	مراغه
۶/۶	۹۹۱/۷	۳۲۶/۸	۱۲۱۸/۲	۱۲۱۸/۲	۴۵۴۰/۸	۷۶۷	۷۷۸	۷۷۸	۴۹۸۱	مهاباد

جدول (۳) ماتریس احتمال حالت‌های انتقال شرطی و شکل (۴) توزیع فضایی خطوط هم-احتمال انتقال سری‌های زمانی بارندگی را نشان می‌دهد. همان گونه که در این جدول و شکل مشاهده می‌شود، احتمال گذر از یک حالت معین به همان حالت بسیار بالاست. مقادیر P_{dd} که بیانگر دو روز خشک متوالی است بین ۸۱ تا ۸۷ درصد در نوسان است و احتمال گذر از حالت بارانی به بارانی (P_{ww}) در همه ایستگاه‌ها بیشتر از ۵۰ درصد است. در عوض احتمال گذر از حالت خشک به بارانی بسیار کم و در حدود ۱۳ تا ۱۹ درصد می‌باشد. مقایسه حالت P_{dd} با P_{ww} بیانگر برتری نسبی حالت خشک نسبت به حالت بارانی است. مقدار P_{dd} در تمام ایستگاه‌ها بیشتر از مقدار P_{ww} می‌باشد.

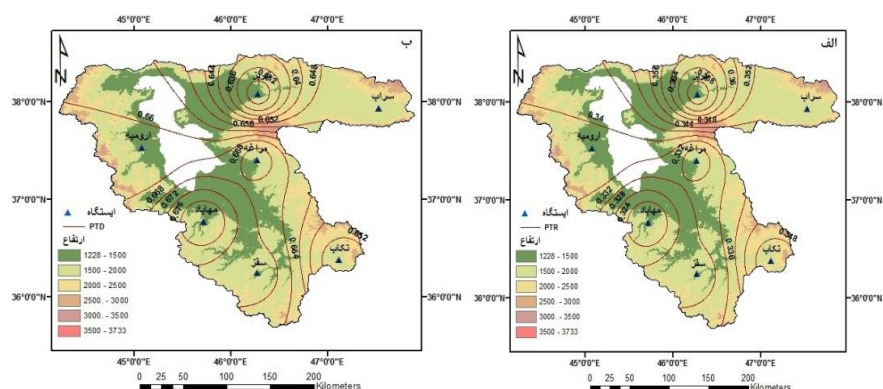
جدول (۳). ماتریس احتمال حالت‌های انتقال شرطی

ایستگاه	P_{dd}	P_{dw}	P_{wd}	P_{ww}
ارومیه	۰/۸۴	۰/۱۶	۰/۴۹	۰/۵۱
تبریز	۰/۸۱	۰/۱۹	۰/۴۵	۰/۵۵
تکاب	۰/۸۳	۰/۱۷	۰/۴۶	۰/۵۴
سراب	۰/۸۱	۰/۱۹	۰/۵۰	۰/۵۰
سقز	۰/۸۷	۰/۱۳	۰/۴۸	۰/۵۲
مراغه	۰/۸۶	۰/۱۴	۰/۴۹	۰/۵۱
مهاباد	۰/۸۶	۰/۱۴	۰/۵۰	۰/۵۰

به منظور شناسایی شرایط درازمدت منطقه مورد مطالعه، مقدار تعادل احتمال برای هر یک از حالت‌های دوگانه محاسبه گردید. احتمال تعادل بیانگر آن است که هر ایستگاه در درازمدت به طور متوسط چند درصد از زمان را در یک حالت معین باقی خواهد ماند. بدین منظور، احتمال تعادل برای حالت‌های دوگانه بارانی و خشک محاسبه و در شکل ۵ ارائه گردید. مجموع دو حالت برابر یک (۱۰۰ درصد) می‌باشد. این شکل نشان می‌دهد که در تمام ایستگاه‌ها احتمال تعادل حالت خشک بیشتر از حالت بارانی است و در کل احتمال روزهای خشک نسبت به روزهای بارانی بیشتر خواهد بود.



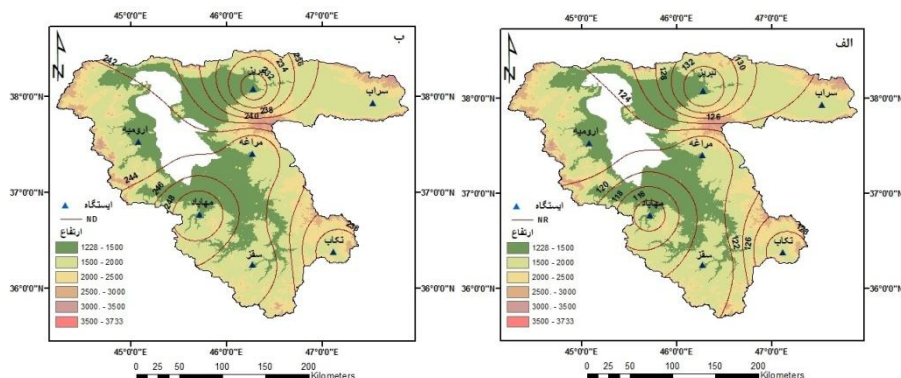
شکل (۴). توزیع فضایی احتمال انتقال سری‌های زمانی بارندگی در حوضه دریاچه ارومیه



شکل (۵). احتمال تعادل حالت‌های بارانی (الف) و خشک (ب) ایستگاه‌های حوضه دریاچه ارومیه

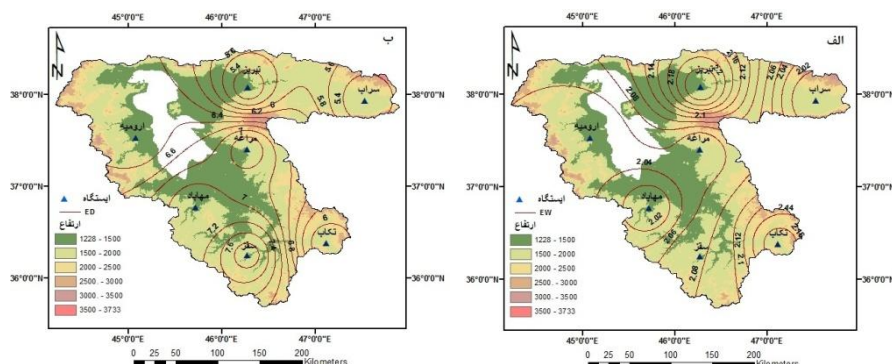
تعداد روزهای بارانی و خشک مورد انتظار در حوضه دریاچه ارومیه در شکل (۶) نشان داده شده است. این اشکال نشان می‌دهد که تعداد روزهای خشک در تمام ایستگاه‌ها بیشتر از

روزهای بارانی می‌باشد. حداکثر روزهای بارانی مورد انتظار در شمال منطقه مورد مطالعه و مربوط به ایستگاه تبریز و حداقل آن در جنوب و جنوب غرب حوضه و مربوط به ایستگاه‌های مهاباد، سقز و مراغه می‌باشد (شکل ۶ الف).



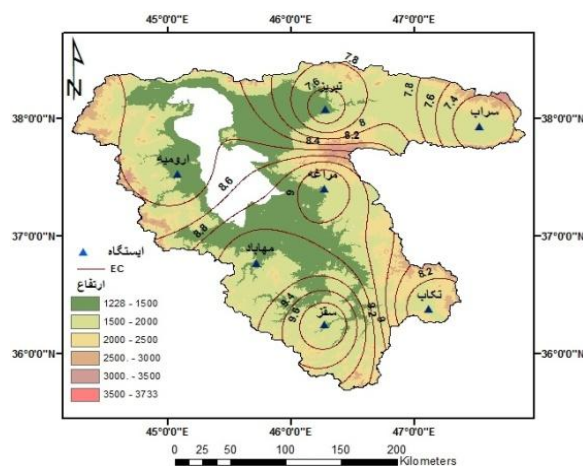
شکل (۶). تعداد روزهای بارانی (الف) و خشک (ب) مورد انتظار در حوضه دریاچه ارومیه

شکل (۷) میانگین تداوم روزهای بارانی و خشک پیش بینی شده را در ایستگاه‌های مورد مطالعه نشان می‌دهد. بر اساس شکل مزبور، میانگین تداوم روزهای بارانی در حوضه دریاچه ارومیه در حدود دو روز در ماه برآورد گردیده است. میانگین تداوم روزهای خشک از شمال به جنوب حوضه افزوده می‌شود، به طوری که ایستگاه‌های تبریز و سراب در شمال حوضه دارای تداوم روزهای خشک کمتری بوده و ایستگاه‌های جنوبی حوضه مانند سقز، مراغه و مهاباد دارای تداوم روزهای خشک بیشتری می‌باشند. میانگین تداوم روزهای خشک بین ۵/۲۶ تا ۷/۶۹ روز در ماه متغیر است (شکل ۷ ب).



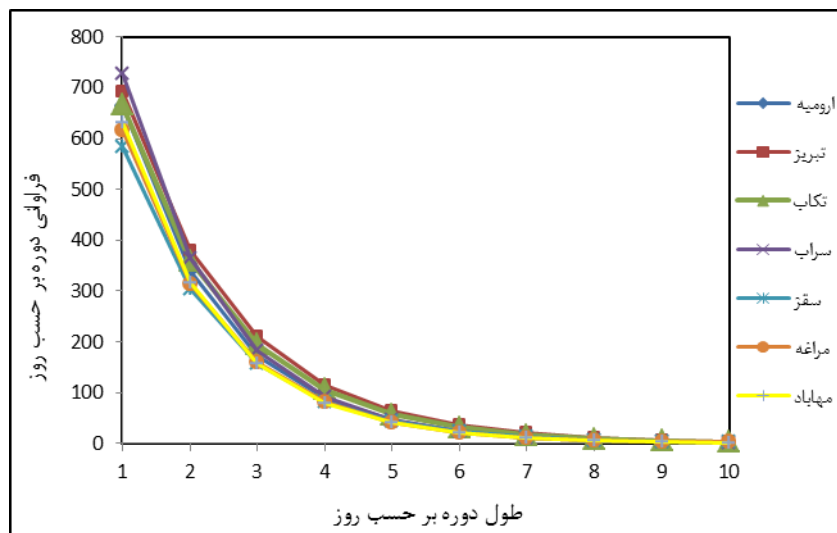
شکل (۷). میانگین تداوم روزهای بارانی (الف) و خشک (ب) در حوضه دریاچه ارومیه

مجموع دوره‌های بارز و پی‌درپی بارانی و خشک که با عنوان سیکل هوایی نامیده می‌شود در شکل (۸) نشان داده شده است. به لحاظ منطقه‌ای ایستگاه سراب و سقز به ترتیب دارای کمترین و بیشترین سیکل‌های هوایی هستند. به طور کلی می‌توان گفت در حوضه دریاچه ارومیه هر ۸/۵ روز یک سیکل هوایی ترکیبی شامل یک دوره بارانی دو روزه و یک دوره خشک ۶/۵ روزه وجود خواهد داشت. بر اساس نتایج به دست آمده، طولانی‌ترین سیکل‌های هوایی مربوط به ماه‌هایی است که کمترین روزهای بارانی را داشته‌اند.

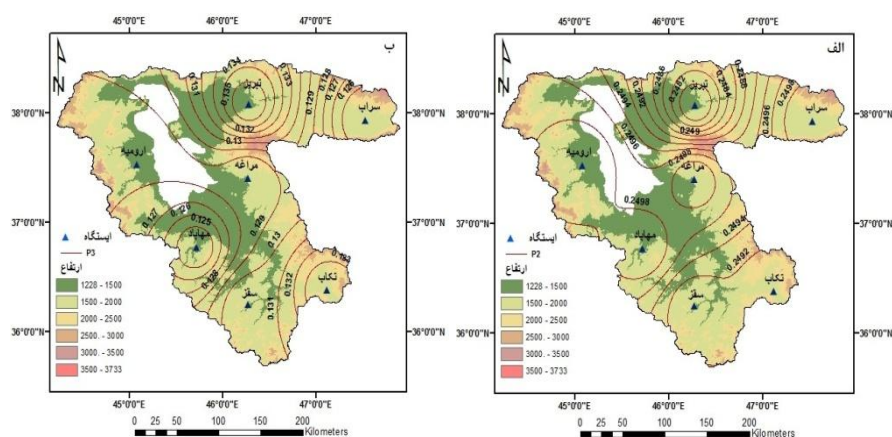


شکل (۸). توزیع فضایی سیکل هوایی ایستگاه‌های حوضه دریاچه ارومیه

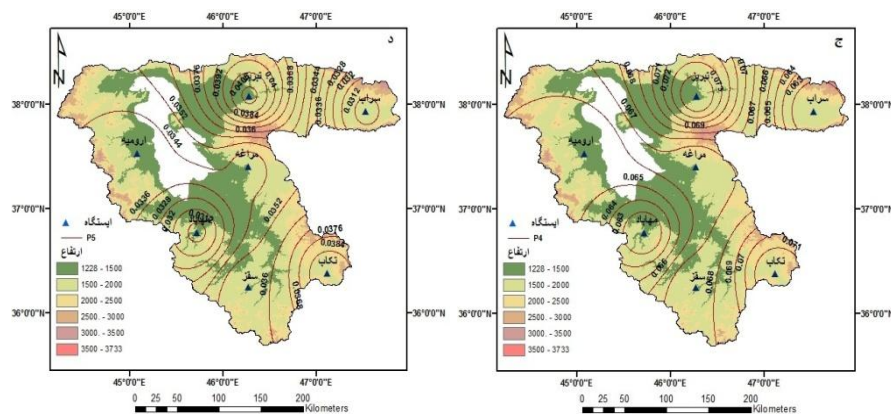
یکی از اهداف این تحقیق برآورد دوره‌های بارانی در حوضه دریاچه ارومیه است. به منظور پیش‌بینی دوره‌های بارانی، فراوانی نظری تعداد دوره‌های n روزه بارانی با استفاده از رابطه ۱۳ پیش‌بینی شد. نتایج حاصل از این پیش‌بینی برای توالی‌های یک تا ده روزه در شکل ۹ آورده شده است. شکل گویای این مطلب است که با افزایش طول دوره‌ها، تعداد فراوانی روزهای بارانی کاسته می‌شود. به عنوان مثال در ایستگاه ارومیه در دوره مورد مطالعه، فراوانی دوره یک روزه بارانی ۶۶۵ روز برآورد شده است در حالی که فراوانی دوره پنج روزه به ۴۶ روز و فراوانی دوره ۱۰ روزه به ۳ روز کاهش یافته است. احتمال وقوع دوره‌های بارانی دو تا پنج روزه نیز در شکل ۱۰ و ۱۱ آورده شده است. احتمال بارش دو روزه برای ایستگاه‌های حوضه ۲۵ درصد، و احتمال بارش‌های ۳ روزه، ۴ روزه و ۵ روزه به ترتیب ۱۳، ۷ و ۳/۵ درصد می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش طول دوره‌های بارانی، احتمال وقوع آنها نیز کاهش می‌یابد.



شکل (۹). نمودار فراوانی برآورد شده تعداد دوره‌های n روزه بارانی در حوضه دریاچه ارومیه

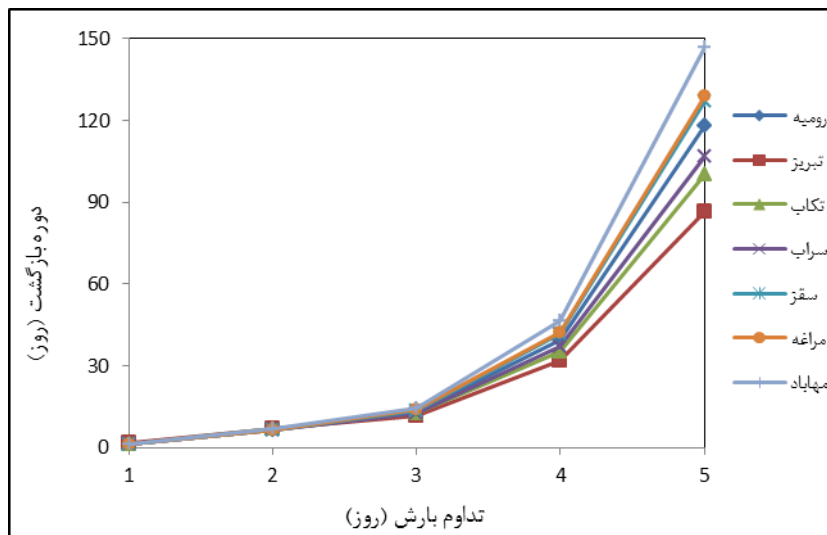


شکل (۱۰). احتمال وقوع بارش‌های ۲ روزه (الف) و ۳ روزه (ب) در حوضه دریاچه ارومیه



شکل (۱۱). احتمال وقوع بارش‌های ۴ روزه (ج) و ۵ روزه (د) در حوضه دریاچه ارومیه

دوره بازگشت باران‌های یک تا ۵ روزه با استفاده از رابطه ۱۴ برای ایستگاه‌های مورد مطالعه محاسبه شد که نتایج آن در شکل (۶) آورده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود به ازای افزایش طول دوره بارانی، دوره بازگشت آن نیز افزایش می‌یابد یعنی زمان زیادی طول می‌کشد تا یک دوره پنج روزه بارانی دوباره اتفاق بیفتد. این روند را در مورد تمام ایستگاه‌ها می‌توان شاهد بود.



شکل (۶). دوره بازگشت باران‌های دو تا ۵ روزه در حوضه دریاچه ارومیه

نتیجه گیری

در این تحقیق با به کارگیری مدل زنجیره مارکف، احتمال تواتر و تداوم روزهای بارانی در حوضه دریاچه ارومیه با استفاده از ۷ ایستگاه سینوپتیک در سال‌های ۲۰۱۴-۱۹۹۵ مورد تحلیل قرار گرفت. انطباق زنجیره مارکف مرتبه اول دوحالته با داده‌های مورد مطالعه با استفاده از آزمون کای دو با سطح اطمینان ۹۹ درصد تایید شد. نتایج تحقیق نشان داد که از لحاظ فراوانی، روزهای بارانی در حوضه دریاچه ارومیه به طور میانگین ۲۵ درصد از روزهای سال را در بر می‌گیرد و در ۷۵ درصد از روزهای سال دوره خشک بر کل حوضه حاکم است. در حالت‌های انتقال شرطی بارندگی، احتمال وقوع حالت P_{dd} بیشتر از سایر حالت‌ها (P_{wd} و P_{dw} و P_{ww}) است. به‌طوری که در تمام ایستگاه‌ها مقدار آن به حدود ۶۰ درصد و بیشتر می‌رسد. بر اساس شاخص‌های مورد بررسی، در فاصله سال‌های ۱۹۹۵ تا ۲۰۱۴ حوضه دریاچه ارومیه روزهای خشک بیشتری را در مقایسه با روزهای بارانی تجربه کرده است. میانگین تداوم روزهای بارانی در حوضه در حدود دو روز برآورد گردید درحالی که میانگین تداوم روزهای خشک بین ۵/۲۶ تا ۷/۶۹ روز متغیر است. بر این اساس، در تمام ایستگاه‌ها احتمال تعادل حالت خشک بیشتر از حالت بارانی است و در کل احتمال روزهای خشک نسبت به روزهای بارانی بیشتر خواهد بود. بررسی سیکل هوایی نشان داد که در حوضه دریاچه ارومیه هر ۸/۵ روز یک سیکل هوایی ترکیبی شامل یک دوره بارانی دو روزه و یک دوره خشک ۶/۵ روزه وجود خواهد داشت. برآورد فراوانی و احتمال وقوع دوره‌های بارانی دو تا ده روزه نشان داد که با افزایش طول دوره‌ها، تعداد فراوانی روزهای بارانی کاسته می‌شود و با افزایش طول دوره‌های بارانی، احتمال وقوع آنها کاهش می‌یابد. برآوردهای مربوط به دوره برگشت دوره‌های n روزه بارانی نشان داد که به ازای افزایش طول دوره بارانی، دوره بازگشت آن نیز افزایش می‌یابد.

تشکر و قدردانی

این مقاله بر اساس طرح تحقیقاتی و با حمایت مالی حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه ارومیه انجام شده است.

منابع و مآخذ

۱. بختیاری، بهرام، شهرکی، نادیا و احمدی، محمدمهدی (۱۳۹۳). برآورد احتمالات بارش روزانه با استفاده از مدل زنجیره مارکف در اقلیم‌های مختلف ایران، تحقیقات منابع آب ایران، شماره ۲، صفحات ۴۴-۵۵.
۲. جلالی، مسعود، کارگر، حلیمه و سلطانی، صغری (۱۳۹۰). بررسی احتمال وقوع روزهای بارانی در شهر ارومیه با استفاده از مدل زنجیره مارکف، فضای جغرافیایی، شماره ۳۵، صفحات ۲۵۷-۲۳۵.
۳. حجازی‌زاده، زهرا و شیرخانی، علیرضا (۱۳۸۴). تحلیل و پیش‌بینی آماری خشکسالی و دوره‌های خشک و تر کوتاه‌مدت در استان خراسان، پژوهش‌های جغرافیایی، شماره ۵۲.
۴. خورشیددوست، علی محمد و فخاری، مجتبی (۱۳۹۵). بررسی احتمال تواتر و تداوم روزهای بارانی در جنوب غرب ایران با استفاده از مدل زنجیره مارکف، جغرافیا و برنامه ریزی، شماره ۵۵، صفحات ۱۰۴-۸۷.
۵. رحیمی، جابر، رحیمی، علی و بذرافشان، جواد (۱۳۹۲). بررسی تداوم روزهای همراه با آلاینده مونوکسیدکربن (CO) در هوای شهر تهران با استفاده از مدل زنجیره مارکف، علوم و تکنولوژی محیط زیست، شماره ۲، صفحات ۹۰-۷۹.
۶. رسولی، علی اکبر (۱۳۹۰). مقدمه‌ای بر هواشناسی و اقلیم شناسی ماهواره‌ای، انتشارات دانشگاه تبریز، ۴۵۵ صفحه.
۷. رضی، طیب، دانش کار آراسته، پیمان، اختری، روح انگیز و ثقفیان، بهرام (۱۳۸۶). بررسی خشکسالی‌های هواشناسی (اقلیمی) در استان سیستان و بلوچستان با استفاده از نمایه SPI و مدل زنجیره مارکف، تحقیقات منابع آب ایران، سال سوم، شماره ۱، صفحات ۳۵-۲۵.
۸. سلیقه، محمد، علیجانی، بهلول و دل آرا، قدیر (۱۳۹۰). تحلیل فضایی بارش فصول مرطوب سال با استفاده از مدل زنجیره مارکف، مطالعه موردی استان اردبیل، تحقیقات کاربردی علوم جغرافیایی، شماره ۲۳، صفحات ۴۴-۲۵.
۹. صادقی‌نیا، علیرضا، حجازی‌زاده، زهرا، حمیدیان‌پور، محسن و پورسربندان، راهبه (۱۳۹۲). برآورد احتمالات خشکسالی و ترسالی با استفاده از نمایه SPI و مدل زنجیره مارکف مطالعه موردی: تهران، فضای جغرافیایی، شماره ۴۳، صفحات ۸۱-۶۵.
۱۰. عساکره، حسین (۱۳۸۷). بررسی احتمال تواتر و تداوم روزهای بارانی در شهر تبریز با استفاده از مدل زنجیره مارکف، تحقیقات منابع آب، سال چهارم، شماره ۲، صفحات ۵۶-۴۶.
۱۱. عساکره، حسین و مازینی، فرشته (۱۳۸۹). بررسی احتمال وقوع روزهای خشک در استان گلستان با استفاده از مدل زنجیره مارکف، جغرافیا و توسعه، شماره ۱۷، صفحات ۴۴-۲۹.

۱۲. آشگرتوسی، شادی، علیزاده، امین و جوانمرد، سهیلا (۱۳۸۲). پیش‌بینی احتمال وقوع خشکسالی در استان خراسان، تحقیقات جغرافیایی، شماره ۷۰، صفحات ۱۲۸-۱۱۹.
۱۳. کردوانی، پرویز، محمدی، حسین و افشار، مژگان (۱۳۸۵). بررسی دوره های خشک و تر تهران (مهرآباد) با استفاده از مدل زنجیره مارکف و تحلیل های سینوپتیک. فصل نامه جغرافیایی سرزمین، شماره ۱۷، صفحات ۳۴-۱۱.
۱۴. مطالعات پایه منابع آب (۱۳۸۷). پروژه بهنگام سازی بیلان آب محدوده‌های مطالعاتی حوضه آبریز دریاچه ارومیه (گزارش هیدرولوژی)، مهندسین مشاور فرسپندآب.
۱۵. مؤمنی، منصور (۱۳۷۴). پژوهش عملیاتی (مدل‌های احتمالی)، انتشارات سمت، ۳۸۶ صفحه.
۱۶. یوسفی، نصرت اله، حجام، سهراب و ایران نژاد، پرویز (۱۳۸۶). برآورد احتمالات خشکسالی و ترسالی با استفاده از زنجیره مارکف و توزیع نرمال (مطالعه موردی: قزوین). پژوهش‌های جغرافیایی، شماره ۶۰، صفحات ۱۲۸-۱۲۱.

Alam, N. M., Sharma, G. C., Jana, C., Patra, S., Sharma, N. K., Raizada, A., & Mishra, P. K. (2015). **Probabilistic drought analysis of weekly rainfall data using markov chain model**. Journal of Reliability and Statistical Studies, 8(1), 1.

Dash, P. (2012). **A Markov Chain Modeling of Daily Precipitation Occurences of Odisha**. International Journal of Advanced Computer and Mathematical Sciences, 3(4), 482-486.

Dastidar, A. G., Ghosh, D., Dasgupta, S., & De, U. K. (2010). **Higher order Markov chain models for monsoon rainfall over West Bengal, India**. Indian Journal of Radio and Space Physics, 39(1), 39-44.

Deni, S. M., & Jemain, A. A. (2009). **Fitting the distribution of dry and wet spells with alternative probability models**. Meteorology and atmospheric physics, 104(1-2), 13-27.

Lennartsson, Jan, Anastassia Baxevani, and Deliang Chen. **Modelling precipitation in Sweden using multiple step Markov chains and a composite model**. Journal of Hydrology 363.1 (2008): 42-59.

Makokha, L., Nyongesa, K., Wasike, A., Chonge, M., Tireito, F., and Waswa, S. (2015). **Markovian Model of Rainfall Pattern with Application**, IOSR Journal of Mathematics, 12(4), 70-74.

Mehrotra, R., & Sharma, A. (2006). **A stochastic daily rainfall occurrence generator with higher time scale dependence**. In 30th Hydrology & Water Resources Symposium: Past, Present & Future (p. 414).

Meledje, M. H., Lazare, K. K., Alexis, N. Y., & Issika, S. (2013). **Probability distribution of rainfall in the Bia watershed: contribution of Markov chains**, Hydrology in a Changing World: Environmental and Human Dimensions

Moon, S. E., Ryoo, S. B., & Kwon, J. G. (1994). **A Markov chain model for daily precipitation occurrence in South Korea**. International journal of climatology, 14(9), 1009-1016.

Raheem, M. A., Yahya, W. B., & Obisesan, K. O. (2015). **A Markov Chain Approach on Pattern of Rainfall Distribution**, Journal of Environmental Statistics, 7(1), 1-13.

Rahman, M. S. (1999). **A stochastic simulated first-order Markov chain model for daily rainfall at Barind, Bangladesh**. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 2(1), 7-32.

Sonnadara, D. U. J., & Jayewardene, D. R. (2015). **A Markov chain probability model to describe wet and dry patterns of weather at Colombo**. Theoretical and Applied Climatology, 119(1-2), 333-340.

Wilks, D. S. (1995). **Statistical methods in the atmospheric sciences** (Vol. 100). Academic press, San Diego, California, USA, 467 pp.

Yusuf, A. U., Adamu, L., & Abdullahi, M. (2014). **Markov chain model and its application to annual rainfall distribution for crop production**. Am J Theor Appl Stat, 3(2), 39-43.

