Kharazmi University

Journal of Economic Modeling Research

Print ISSN: 2228 - 6454
Online ISSN: 2538 - 4163

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Reconstruction of Endogenous Jumps in Financial Markets Using Kramers-Moyal Analytical Method

| Hassan Khodavaisi [2*] Mehdi Salemi[1]

1. Ph.D. Candidate, Faculty of Economics and Management, Department of Economic, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: m.salemi@urmia.ac.ir (0009-0004-3356-4547)

2*. Corresponding Author, Associate Professor, Faculty of Economics and Management, Department of Economic, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: h.khodavaisi@urmia.ac.ir (0000-0002-2550-3064)

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
29 Oct. 2024

Received in revised form:
3 Dec. 2024

Accepted:
30 Dec. 2024

Keywords:
Cryptocurrency Price Dynamics, First time passage, Generalized Langevin equation, Jump-diffusion model.

JEL:
C14, C52, D53, G17

ABSTRACT

Based on stylized facts, price behaviour in financial markets is not simply a continuous process, but rather jumps are observed in asset prices that may be exogenous or endogenous. It is claimed that the source of exogenous jumps is news, and the source of endogenous jumps is internal interactions between the agents. The goal is to extract these endogenous jumps as a function of the state variable and time. For this purpose, the generalized Langevin equation is introduced and it is shown that the size and rate of jumps in this equation can be extracted based on the Kramers-Moyal coefficients. In a practical application of the aforementioned method, Ethereum cryptocurrency price data was used between October 2017 and February 2024 with a sampling rate of one minute. By simulating the extracted dynamics, the probability distribution of the first time passage of price of this asset from a specific level was calculated, and an examination of real price behavior shows that the aforementioned distribution was extracted with good accuracy. Also using the extracted dynamics we show that this model has good out-of-sample prediction for price dynamics between 13April2024 to 13May2024 .

Cite this article: Salemi, Mehdi., Khodavaisi, Hassan (2023). Reconstruction of Endogenous Jumps in Financial Markets Using Kramers-Moyal Analytical Method. *Journal of Economic Modeling Research*, 14 (53), 186-222. DOI: 0000000000000000000

© The Author(s).
Publisher: Kharazmi University
DOI: 0000000000000000000000000
Journal of Economic Modeling Research, Vol, 14, No. 53, 2023, pp. 186-222.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

Journal of Economic Modeling Research
Print ISSN: 2228 - 6454
Online ISSN: 2538 - 4163
Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

بازسازی پرشهای درونزا در بازارهای مالی با استفاده از روش تحلیلی ضرایب کرامرز- مویال

مهدی سالمی[1] | حسن خداویسی[2*]

۱. دانشجوی دکتری، گروه آموزشی اقتصاد، دانشکده اقتصاد، دانشگاه ارومیه.

رایانامه: m.salemi@urmia.ac.ir (شناسه ارکید: 0009-0004-3356-4547)

۲*. نویسنده مسئول، دانشیار، گروه آموزشی اقتصاد، دانشکده اقتصاد، دانشگاه ارومیه.

رایانامه: h.khodavaisi@urmia.ac.ir (شناسه ارکید: 0000-0002-2550-3064)

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۸/۸

تاریخ ویرایش:
۱۴۰۳/۹/۱۳

تاریخ پذیرش :
۱۴۰۳/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:
دینامیک قیمت رمزارز، زمان اولین گذر، مدل پخش- پرش، معادله لانژون تعمیم یافته.

طبقه‌بندی JEL:
C14,C52,D53,G17

چکیده

براساس حقایق آماری، رفتار قیمت در بازارهای مالی یک فرآیند پیوسته نیست، بلکه پرش‌هایی در قیمت دارایی‌ها مشاهده می شوند که ممکن است برونزا یا درونزا باشند. ادعا می‌شود که منبع پرش‌های برونزا، اخبار و منبع پرش‌های درونزا، اندرکنش درونی بین عوامل می‌باشد. هدف، استخراج این پرشهای درونزا به صورت تابعی از متغیر حالت و زمان می‌باشد و برای این منظور معادله لانژون تعمیم یافته معرفی شده و نشان داده می شود که اندازه و نرخ پر شها در این معادله برا ساس ضرایب کرامرز-مویال قابل ا ستخراج می‌با شند. در کاربرد عملی روش فوق، از داده های قیمتی رمزارز اتریوم بین اکتبر ۲۰۱۷ تا فور یه ۲۰۲۴ و با نرخ نمونه‌گیری یک دقیقه استفاده شده است. با شبیه سازی دینامیک استخراج شده، توزیع احتمال زمان اولین گذر قیمت این دارایی از یک سطح مشخص محاسبه شده و بررسی رفتار واقعی قیمت نشان می دهد که توزیع مذکور با دقت خوبی استخراج شده است. همچنین با استفاده از دینامیک ا ستخراج شده نشان می‌دهیم که این مدل، پیش‌بینی خارج از نمونه خوبی برای دینامیک قیمت در بازه ۱۳ آوریل ۲۰۲۴ تا ۱۳ می ۲۰۲۴ دارد.

استناد: سالمی، مهدی؛ خداویسی، حسن(۱۴۰۲). بازسازی پرشهای درونزا در بازارهای مالی با استفاده از روش تحلیلی ضرایب کرامرز- مویال. *تحقیقات مدل‌سازی اقتصادی*، ۱۴ (۵۳)، ۱۸۶-۲۲۲.

DOI: 00000000000000000000

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

ناشر: دانشگاه خوارزمی. © نویسندگان.

۱. مقدمه

آیا همه پرشهای مشاهده شده در قیمت دارائیها، منبع خارجی دارند یا برخی از این پرشها براساس مکانیسمهای درونی خود سیستم شکل می‌گیرند؟ این پرسشی است که به عنوان یک مساله باز[۱] توسط کاتلر و همکاران[۲](۱۹۹۸) مطرح شده است و تاکنون تحقیقات گسترده‌ای برای حل این مساله هم از جانب اقتصاددانان و هم فیزیکدانان علاقه‌مند به حوزه مالی صورت گرفته است. براساس مقاله مذکور، مشاهده پرش در قیمت سهام در حالیکه در زمان وقوع این پرشها، اخبار مرتبطی با سهام منتشر نشده است ایجاب می‌کند که ما به دنبال عواملی غیر از اخبار برای توضیح پرشهای مذکور باشیم. بعبارت دیگر، نوسانات بزرگ قیمت صرفاً با تکیه بر تغییرات مشاهده شده در عوامل بنیادی قابل توضیح نمی‌باشند و دامنه این نوسانات بیشتر از آن مقداری است که مدلهای بنیادی پیش بینی می‌کنند و لذا باید دنبال فاکتورهای دیگری غیر از عوامل بنیادی جهت توضیح نوسانات اضافی باشیم.

مساله عدم همخوانی دامنه نوسانات با تغییرات مشاهده شده در عوامل بنیادی توسط جولین و همکاران[۳](۲۰۰۸) نیز بررسی شده است. براساس نتایج تحقیق مذکور نه اخبار مرتبط با تک سهم و نه اخبارکلان به تنهایی نمی‌توانند فرکانس و دامنه نوسانات مشاهده شده در بازده یک تک سهم را توضیح دهند. براساس نتایج این تحقیق حدود ۹۰ درصد پرشهای بزرگ مشاهده شده در بازارهای مالی از طریق اخبار منتشر شده در بلومبرگ، رویترز و یا سایر منابع اصلی اطلاعات سرمایه‌گذاران قابل توجیه نیستند و در حقیقت فقط حدود ۵ تا ۱۰ درصد پرشهای بزرگتر از 4σ براساس اخبار قابل توضیح می‌باشند.

بنابراین مساله ما در این تحقیق شامل دو بخش می‌باشد: ۱- بخش اول که می‌خواهد به این پرسش پاسخ دهد که مکانیسم پشت پرده پرشهای مشاهده شده در قیمت داراییها چیست؟ آیا این

[۱] open problem

[۲] Cutler et al. (1988)

[۳] Joulin et al. (2008)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

پرشـها محرک خارجی دارند یا مکانیسـمهایی از درون خود سـیسـتم آنها را بوجود می‌آورد؟ ۲- بخش دوم که باید پرشهای مشاهده شده در داده‌های واقعی را مدلسازی و بازتولید کند.

اگر براساس تئوریهای استاندارد موجود در اقتصاد، برونزا بودن پرشها را بپذیریم آنگاه از نظر آماری به یک تناقض آشکار می‌رسیم چرا که از نظر آماری، مشاهدات واقعی وجود دم سنگین در بازده دارائیها را تائید می‌کنند(گوپیکریشـنان و همکاران[۱]، ۱۹۹۹; مالورنگ و همکاران[۲]، ۲۰۰۵). وجود دم سـنگین در توزیع داده‌های مربوط به بازده دارائیها بیانگر این اسـت که نوسـانات با دامنه بزرگ، فرکانس بالایی دارند و به صورت پرشمار تکرار شده‌اند لذا اگر نوسانات با دامنه بزرگ را صـرفاً ناشـی از اخبار بدانیم آنگاه درباره فرکانسـها به تناقض می‌رسـیم چرا که فرکانس اخبار به مراتب کمتر از فرکانس مشاهده شده در مورد پرش بازده می‌باشد.

دیدگاه استاندارد در اقتصاد، تغییرات قیمت را صرفاً ناشی از شوکهای خارجی می‌داند(فارمر[۳]، ۲۰۱۰). اما در دیدگاه جدید یعنی نظریه سیستمهای پیچیده، دینامیک سیستم براساس ترکیب تاثیر رفتار متقابل اجزای سـیسـتم(شـوکهای درونزا) و تاثیر میدانهای خارجی(اخبار) بیان می‌شـود. اندرکنش داخلی بین عوامل در بازارهای مالی، عمدتاً ناشـی از روایات اقتصـادی[۴] شـکل گرفته در شـبکه‌های اجتماعی، رفتارهای گله‌ای[۵] و تقلید از سـایر معامله‌گران (شـیلر[۶]، ۲۰۱۷) و یا ترس و طمع[۷] معامله گران(گرینوود و همکاران[۸]، ۲۰۲۲) می‌باشـد که در نهایت به بیش واکنشـی یا کم واکنشی‌ه[۹]ای مشاهده شده در بازار می‌انجامد.

هدف از بازسـازی فرآیند تصـادفی که ما در این تحقیق انجام می‌دهیم، تولید دینامیک قیمت دارایی در بازه زمانی کوتاه مدت بین دو شـوک کلان و بازسـازی پرشـهای درونزایی اسـت که

---

۱ Gopikrishnan et al. (1999)
۲ Malevergne* et al. (2005)
۳ Farmer, R. E (2010)
4 Economic Narratives
۵ Herding behavior
۶ Shiller (2017)
۷ Fear&Greed
۸ Greenwood et al. (2022)
9 Overreacion or underreaction

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

براساس شوکهای خارجی قابل توجیه نیستند. همانطور که در ادامه خواهیم دید مدلهای پخش-پرش این امکان را به ما می‌دهند که در غیاب اخبار کلان هم، پر شهای بزرگ و البته درونزا دا شته باشیم و این چیزی است که با واقعیت بازارهای مالی بیشتر همخوانی دارد چرا که اگر قرار بود رفتار قیمت در بازارهای مالی براساس فرضیه انتظارات عقلایی شکل بگیرد آنگاه با توجه به ادعای این نظریه- مبنی بر تعدیل سریع قیمتها و شکل گیری سریع تعادل جدید پس از بروز شوک- باید قیمتها تا وقوع شوک خارجی بعدی رفتاری اختلالی[۱](نوساناتی کوچک حول تعادل جدید) از خود نشان می‌دادند. اما کاتلر و همکاران(۱۹۹۸)، جولین و همکاران(۲۰۰۸) و فارمر(۲۰۲۴) نشان می‌دهند که در دنیای واقعی، ما حتی در غیاب اخبار موثر بر سهام نیز شاهد پرش در قیمت داراییها هستیم. بنابراین با وجود شوکهای درونزا می‌توان این ایده را مطرح کرد که "بازار خودش اخبار خودش را می‌سازد" بدین معنی که حتی در غیاب اخبار خارجی و در سایه اندرکنش داخلی اجزا، بازار می‌تواند دینامیک غیر اختلالی[۲] داشته باشد.

هدف ما در حالت کلی استخراج رفتار ماکروسکوپی سیستم(و در اینجا قیمت به عنوان رفتار ماکروسکوپی بازار) از روی مشاهدات می باشد. منظور از استخراج رفتار ماکروسکوپی این است که برخلاف مدلهای عامل-پایه[۳] (مثلاً مدل آیزینگ[۴])که قیمت را به عنوان برآیند رفتار تک تک معامله گران در بازار مدل می کنند، در اینجا رفتار قیمت بدون توجه به عوامل پشت پرده آن و صرفاً براساس رفتار قبلی خود قیمت(به عنوان متغیرحالت سیستم) مدلسازی می‌شود و به نوعی بجای روش مرسوم مدلسازی پایین به بالا[۵] در اقتصاد، در این تحقیق ایده مدلسازی بالا به پایین[۶] پیاده سازی می‌شود. برای این هدف ما مدل پارامتری خاصی را تصریح نمی کنیم بلکه در این تحقیق، مدل ما فرم کلی یک معادله دیفرانسیل تصادفی را خواهد داشت و ضرایب این معادله بصورت تحلیلی و براساس ضرایب کرامرز- مویال استخراج خواهد شد. در این تحقیق نشان

---

[۱] perturbative

[۲] Non-perturbative

[۳] Agent-Based

[۴] Ising

[5] bottom-up

[6] top-down

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

می‌دهیم که دامنه و نرخ پرش به صورت تحلیلی براساس ممانهای بالاتر قابل استخراج می‌باشند. مشارکت دیگر ما در این تحقیق، معرفی کمیت Q است که براساس ممانهای چهارم و ششم محاسبه می شود و به عنوان معیاری عملی جهت انتخاب بین مدل پخش و مدل پخش- پرش می‌باشد. دقت روش معرفی شده در این تحقیق را از طریق بازسازی یک فرآیند معلوم ارزیابی می کنیم و همچنین یک کاربرد عملی از روش کرامرز- مویال ارائه می دهیم. در یکی از کاربردهای عملی ارائه شده در این تحقیق، اهمیت استخراج دینامیک فرآیند در مقایسه با استخراج توزیع احتمال آن مشهود است. ما با استخراج توزیع احتمال یک فرآیند و سپس نمونه گیری از توزیع استخراج شده، نهایتاً می‌توانیم به سوالاتی که در آنها بحث ترتیب زمانی مهم نیست پاسخ دهیم(مثلاً محاسبه ارزش در معرض خطر در طول دوره مشخص). اما مساله گذار مقدار فرآیند از یک مرز مشخص در یک زمان معین، نمونه‌ای از مسایلی است که اهمیت استخراج دینامیک یک فرآیند تصادفی را نشان می‌دهد چرا که دو فرآیند با توزیع احتمال یکسان، می‌توانند دینامیک متفاوتی داشته باشند به عنوان مثال براساس مطالعه رین و همکاران[۱](۲۰۱۶) فرآیند ساده Ornstein-Uhlenbeck با ضریب رانش $-x$ و ضریب پخش یک، دارای توزیع احتمال نرمال N(0,1) می‌باشد و در عین حال یک فرآیند تصادفی پیچیده با ضریب رانش $-x^3+x$ و ضریب پخش x^2+1 نیز دارای همین توزیع می‌باشد. یعنی با داشتن توزیع احتمال بازده، می‌توان احتمال یک سطح زیان مشخص را محاسبه کرد ولی برای محاسبه توزیع احتمال زمان وقوع چنین زیانی باید دینامیک فرآیند موجود باشد. با توجه به اینکه در صورت وجود پرش در فرآیند تصادفی، در حالت کلی جواب تحلیلی برای توزیع مذکور استخراج نشده است و تنها برای حالت خاصی که در آن نرخ پرش مقدار ثابتی در نظر گرفته شده است جواب تحلیلی توسط شی[۲] و همکاران(۲۰۱۷) ارائه شده است، لذا رویکرد موجود در این زمینه استخراج توزیع احتمال مذکور از طریق شبیه سازی دینامیک حاکم می‌باشد(تبار[۳]، ۲۰۱۹) و چنین توزیعی برای یک مورد عملی در این تحقیق از طریق شبیه سازی استخراج می شود. در حالت کلی و در مباحث مربوط به فرآیندهای تصادفی

[۱] Rinn, et al
[۲] Xu
[۳] Tabar

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

مساله عبور مقدار فرآیند از یک مرز مشخص و در زمان معین تحت عنوان مساله زمان اولین گذر[1] شناخته می شود و ما در این تحقیق از این مفهوم و ابزار ریا ضی موجود در این زمینه جهت م ساله محاسبه توزیع احتمال زمان وقوع یک سطح مشخص از زیان یا بازده در فرآیند قیمت دارائیها استفاده خواهیم کرد.

در ادامه، در بخش دوم مبانی نظری و مرور پیشینه را خواهیم دا شت و در بخش سوم ضرایب کرامرز- مویال و ارتباط آنها با ضرایب معادله لانژون ارائه می‌شود. در بخش چهارم استخراج عملی دینامیک فرکانس بالای رمزارز اتریوم را خواهیم داشت و در نهایت بخش پنجم به نتیجه گیری اختصاص یافته است.

۲. مبانی نظری و پیشینه تحقیق

پرشهای مشاهده شده در بازه بین دو شوک خارجی در واقع نوسانات اضافی مشاهده شده در قیمت داراییها هستند که براساس تغییر ایجاد شده در ارزش ذاتی آن قابل توجیه نیستند. بعبارت دیگر زمانی که یک شوک برونزا رخ می‌دهد در سایه تغییر عوامل بنیادی و در نتیجه تغییر در جریانات نقدی آتی انتظاری، ارزش ذاتی داراییها نیز تغییر می‌کند اما مقدار و فرکانس نوسان قیمتی مشاهده شده در بازار با تغییر برآورد شده در ارزش ذاتی همخوانی ندارد. این مساله در ادبیات مالی به معمای نوسانات اضافی مشهور می‌باشد(شیلر، ۱۹۸۱).

مبانی نظری موجود در توجیه پدیده نوسانات اضافی مشاهده شده در قیمت دارائیها، به دو دسته عمده تقسیم بندی می‌شوند:

۱) دسته اول نظریاتی هستند که برپایه شکل گیری هیجانات و بروز بیش واکنشی(یا کم واکنشی) در رفتار عوامل بازار هنگام بروز شوک می‌باشند. از جمله نظریه پردازان مشهور در زمینه مالی رفتاری، رابرت شیلر[2] از برندگان جایزه نوبل ۲۰۱۳ می‌باشد که روایات اقتصادی[3] شکل گرفته در رسانه‌ها و فضای مجازی را عامل تحریک عوامل بازار می‌داند(شیلر، ۲۰۱۷). به اعتقاد

[1] First Time Passage Problem
[2] Robert Shiller
[3] Eonomic Narratives

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

وی یک نویز خبری کوچک می‌تواند در سایه وجود مکانیسم بازخورد[1] مثبت در رفتار عوامل بازار، تشدید شده و به یک موج خبری بزرگ و شوک موثر در تشکیل حباب قیمتی تبدیل گردد. تقویت شوکهای کوچک در سایه وجود مکانیسم فیدبک مثبت در رفتار عوامل بازار و تبدیل آنها به حباب و نوسانات بزرگ قیمتی در نظریه دیگری تحت عنوان نظریه بازتاب[2] توسط جورج سوروس فعال مشهور بازار سرمایه مطرح گردیده است. ایده بازتاب که بیانگر وجود رفتار حلقه‌وار[3] بین عوامل در بازارهای مالی می‌باشد، با الهام از رفتار اسپینها[4] در فیزیک آماری و در مدلی با نام LPPL[5] توسط سورنته[6](۲۰۲۲) پیاده سازی شده است که این مدل در حقیقت کاربرد مدل آیزینگ[7] در حوزه مالی می‌باشد. در دو تحقیق داخلی جداگانه توسط نمکی و حقگو(۲۰۲۱) و عبدالمالکی و همکاران(۱۳۹۴) مدل LPPL در توجیه نوسانات اضافی مشاهده شده در قیمتها در بورس تهران مورد استفاده قرار گرفته است و نتایج نشان می‌دهد مدل مذکور با دقت خوبی قادر به مدلسازی مکانیسم فیدبک مثبت در رفتار عوامل بازار می‌باشد.

۲) دسته دوم نظریاتی هستند که همچنان برپایه ماکزیمم سازی مطلوبیت نهایی می‌باشند و با متغیر در نظر گرفتن نرخ ریسک گریزی خانوار تحت شوکهای کلان اقتصادی(کمبل و کاکرن[8]، ۱۹۹۹) و یا افزودن مفهوم ابهام گریزی[9](ایژاکیان و بنینگا[10]، ۲۰۱۱) سعی در توجیه نوسانات اضافی دارند. مطالعه این طیف از مدلها نشان می‌دهد که همچنان هدف استخراج معادله اویلر و در نتیجه استخراج معادله اساسی قیمت‌گذاری دارائیهای سرمایه‌ای[11] با استفاده از روابط حاصل از بهینه

---

[1] Feedback Mechanism

[2] Reflexivity

[3] Circular bahavior

[4] Spin

[5] Log-Periodic Power-Law

[6] Sornette

[7] Ising

[8] Campbell & Cochrane (1999)

[9] Ambiguity Aversion

[10] Izhakian and Benninga

[11] براساس کاکرن(۲۰۱۷) معادله اساسی قیمت‌گذاری دارائیهای سرمایه‌ای به صورت $E(M_{t+1}R^e_{t+1}) = 1$ می‌باشد که در آن $R^e_{t+1} = r^e_{t+1} + R_f$ بازده کلی می‌باشد. r^e_{t+1} صرف ریسک و R_f بازده بدون ریسک و $M_{t+1} = \beta\left(\frac{U'_{c_{t+1}}}{U'_{c_t}}\right)^{-\gamma}$ می‌باشد.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

سازی مصرف خانوار می‌باشد با این تفاوت که در این نوع مدلها تابع مطلوبیت خانوار با نرخ ریسک گریزی متغیر با زمان و یا با پارامتر جدید ابهام گریزی در نظر گرفته می‌شود تا بتوان در نهایت به مدلی دست یافت که قادر به تولید نوسانات اضافی مشاهده شده در داده‌های واقعی باشد.

بررسی مدلهای ارائه شده برپایه نظریات فوق نشان می‌دهد که هدف عمده این مدلها تولید دامنه غیرعادی و بزرگ نوسانات می‌باشد در حالیکه ما در مشاهدات علاوه بر مشکل دامنه بزرگ نوسانات، مساله وجود پرشهای فرکانس بالا را نیز داریم بطوریکه این نکته در مدلهای پیشین مورد توجه قرار نگرفته است. اما در این تحقیق به عنوان نوآوری مدلی استخراج می شود که قادر است علاوه بر تولید دامنه بزرگ نوسانات، فرکانس بزرگ مشاهده شده در داده‌ها را نیز تولید کند و برای این منظور در کنار متغیر اندازه پرش، متغیر نرخ پرش که بیانگر فرکانس نوسانات بزرگ می‌باشد معرفی و استخراج می‌شود.

مطالعه پیشینه این تحقیق نشان می‌دهد که مدلهای مختلفی برای بررسی معمای نوسانات اضافی ارائه شده‌اند از جمله مدلهای مالی رفتاری (شیلر، ۲۰۰۳; گرینوود و همکاران، ۲۰۲۲; گنایولی و شلیفر[۱]، ۲۰۱۸)، مدل ریسک گریزی متغیر با زمان(کاکرن، ۲۰۱۷; کمبل و کاکرن[۲]، ۱۹۹۹)، مدل قیمت گذاری دارایی واسطه‌ای(هی و کریشنامورتی[۳]، ۲۰۱۸; برونرمیر و کریشنامورتی[۴]، ۲۰۲۰، برونرمیر ۲۰۲۴)، مدلهای ابهام گریزی(هانسن و سارجنت[۵]، ۲۰۱۹; ۲۰۲۲) ، مدل حوادث نادر(بارو[۶]، ۲۰۰۹) و مدلهایی که برپایه ارزیابی احتمال رشد می‌باشند(کیس و همکاران[۷]، ۲۰۱۴; شیلر، ۲۰۱۴).

براساس داده‌های تاریخی، میانگین بلندمدت صرف ریسک سهام حدود ۷ درصد می‌باشد که عوامل بنیادی قادر به توضیح آن نیستند(شیلر، ۱۹۸۱) و در حقیقت میانگین بلندمدت صرف

[۱] Gennaioli & Shleifer (2018)
[۲] Campbell & Cochrane (1999)
[۳] He & Krishnamurthy (2018)
[۴] Brunnermeier & Krishnamurthy (2020)
[۵] Hansen & Sargent (2019, 2022)
[۶] Barro (2009)
[۷] Case et al.(2014)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

ریسک سهام برا ساس عوامل بنیادی حدود ۴ در صد برآورد می شود. یکی از مدلهای ارائه شده برای حل تناقض مشاهده شده بین داده‌های واقعی و نتایج مدلها، مدل ریسک گریزی متغیر با زمان(کمبل و کاکرن[۱]، ۱۹۹۹) می‌باشد که براساس آن تفاوت بین دو مقدار صرف ریسک سهام تاریخی و صرف ریسک سهام محاسبه شده براساس معادله اولر(مساله بهینه سازی مصرف خانوار)، به تفاوت نرخ ریسک گریزی در دوران رونق و رکود برمی‌گردد. بدین معنی که در دوران رونق، ریسک گریزی خانوار نسبت به دوران رکود کمتر است و همین امر باعث می‌شود خانوار در دوران رونق، بازده مورد انتظار کمتری از داراییهای ریسکی داشته باشند و درنتیجه در این دوران تقاضای داراییهای ریسکی افزایش یافته و بالطبع قیمت آنها افزایش می‌یابد و در کل این مکانیسم باعث می شود صرف ریسک سهام بیشتر از آنچه براساس رشد مصرف قابل توضیح است باشد. راه حل دیگری که اخیراً برای حل این معما مطرح شده است مدل قیمت گذاری دارایی واسطه ای[۲] می‌باشد و در این نوع مدلها ادعا می‌شود که ظرفیت ریسک پذیری[۳] واسطه‌های مالی وابسته به امکان و فرصت اهرم مالی[۴] توسط آنها بوده و لذا تغییرات ظرفیت ریسک پذیری[۵] واسطه‌های مالی در سایه تغییر فرصتهای اهرم مالی، باعث نوسان قیمت داراییها می‌شود (کاکرن، ۲۰۱۷; هی و کریشنامورتی، ۲۰۱۸).

همچنین مدلهایی نیز براساس مفهوم ابهام گریزی برای حل معمای نوسانات اضافی ارائه شده‌اند و براساس این دیدگاه افزایش میزان ابهام و عدم قطعیت در مورد بازده مورد انتظار یک دارایی باعث کاهش قیمت آن می‌شود. همانطوریکه با افزایش ریسک گریزی افراد، بازده مورد انتظار دارایی ریسکی افزایش و درنتیجه قیمت جاری آن کاهش می‌یابد، ادعا می‌شود ابهام گریزی نیز می‌تواند اثری مشابه روی قیمت دارایی داشته باشد. بدین معنی که اگر ابهام موجود در مورد بازده مورد انتظار یک دارایی افزایش یابد آنگاه سرمایه‌گذار همزمان با صرف ریسک، صرف ابهام نیز

[۱] Campbell & Cochrane

[۲] Intermediary Asset Pricing

[۳] risk-bearing capacity

[۴] fortunes of leverage

[۵] risk-bearing capacity

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

طلب می‌کند و لذا جهت جبران این ابهام، قیمت دارایی کاهش بیشتری نسبت به حالتی که فقط اثر ریسک گریزی وجود دارد، خواهد داشت(ایژاکیان و بنینگا، ۲۰۱۱).

در کنار مدلهایی که اقتصاددانان جهت بررسی نوسانات اضافی در بازارهای مالی ارائه داده‌اند، محققانی از حوزه فیزیک و سیستمهای پیچیده نیز با وارد کردن مفهوم شوکهای درونزا به مساله، مدلهایی را در توجیه این پدیده ارائه کرده‌اند که بیشتر به مدل پخش- پرش مورد بررسی در این تحقیق نزدیک هستند و لذا در ادامه به چند مورد از آنها اشاره می‌کنیم.

هالپرین[۱](۲۰۲۲) تحقیقی را در مورد رفتار قیمت در بازارهای مالی براساس شبیه سازی معادله لانژون انجام داده است و لذا به جهت مدل مورد استفاده به تحقیق ما نزدیکتر می‌باشد با این تفاوت که در تحقیق مذکور، معادله لانژون بدون در نظر گرفتن جمله پرش استخراج شده است. در تحقیق مذکور تابع پتانسیل محدود کننده رفتار سیستم، یک چند جمله‌ای درجه چهار در نظر گرفته شده است و لذا ضریب رانش معادله لانژون یک چندجمله‌ای درجه سه خواهد بود(ضریب رانش برابر منفی گرادیان تابع پتانسیل می‌باشد). در تحقیق اشاره شده، پس از اعمال فروضی روی فرم تبعی تابع پتانسیل و کالیبراسیون ضرایب معادله لانژون، از مدل حاصل برای پیش بینی قیمت اختیار معامله استفاده شده است. در مقایسه با تحقیق مذکور، وقتیکه از روش کرامرز- مویال استفاده می‌کنیم دیگر نیازی به اعمال قید روی تابع پتانسیل و تصریح فرم خاصی برای آن نداریم چرا که قادر هستیم شکل دقیق آن را از روی داده‌ها استخراج کنیم.

در تحقیقی که توسط مارساسویولی و همکاران[۲] (۲۰۲۲) با بررسی اخبار ویژه سهام در بازه پنج ساله روی ۳۰۰ سهم انجام گرفته است، ادعا می‌شود که خواص پرشهای برونزایی که موقع انتشار اخبار مرتبط با سهام مشاهده می شود با پرشهای درونزایی که در غیاب اخبار ویژه سهام مشاهده می شوند تفاوت دارد بطوریکه پرشهای برونزا ناگهانی می‌باشند-که با توجه به تصادفی بودن منبع آنها یعنی اخبار، قابل قبول است- ولی ویژگی پرشهای درونزا این است که متعاقب یک رشد شتابدار در نوسانات می‌باشند و همچنین متاثر از حافظه سیستم و قابل پیش بینی هستند.

---

[۱] Halperin (2022)

[۲] Marcaccioli et al. (2022)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

در دو تحقیق جداگانه فو ست و همکاران[۱] (۲۰۲۰) و ورلی و سورنته[۲] (۲۰۲۲) درباره پر شهای درونزا، بروز این نوع پرشها برپایه وجود حلقه بازخورد[۳] مثبت و تقویت نویز در رفتار عاملهای بازار توجیه می‌شوند. نتایج تحقیقهای مذکور نشان می‌دهند که یک شوک خارجی کوچک در بلند مدت با ضریب ۵ در بازار سهام(فو ست و همکاران، ۲۰۲۰; ورلی و سورنته، ۲۰۲۲) و با ضریب ۲ (ورلی و سورنته، ۲۰۲۲) در بازار ارزهای خارجی تحت تاثیر شوکهای داخلی تقویت می‌شود. چنین نتیجه‌ای با روشی متفاوت از تحقیقات مذکور و با استفاده از متغیرهای ابزاری و تحت فرضیه بازارهای بی کشش[۴] بررسی و تائید شده است(گابیکس و کویجن[۵]، ۲۰۲۱). براساس فرضیه بازارهای بی کشش، اگر در اثر شوک خارجی یک درصد ورود سرمایه به بازار سهام افزایش یابد آنگاه در افق یکساله ما شاهد افزایش پنج درصدی در ارزش کل بازار سهام خواهیم بود.

حال براساس آنچه گفته شد مدل پخش- پرش معرفی می‌شود. با توجه به نتایج تحقیقات مذکور و پذیرش وجود مکانیسم بازخورد مثبت ضعیف و قوی در فازهای مختلف بازار، می‌توان نو سانات قیمت را شامل دو جزء پخش و پرش دانست بطوریکه جزء پخش بیانگر نو ساناتی ا ست که به علت مکانیسم بازخورد مثبت ضعیف شکل می‌گیرند ولی پرشهای درونزا به علت وجود بازخورد مثبت قوی در رفتار عاملها شکل می‌گیرند. یک مدل پایه برای مدلسازی پرشها در بازارهای مالی، مدل پخش- پرش مرتون[۶](۱۹۷۶) می‌با شد که در حقیقت تعمیمی از معادله بلک- شولز و به فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dZ + dq \qquad \text{رابطه ۱)}$$

در رابطه ۱، α بازده مورد انتظار، σ^2 واریانس بازده، Z فرآیند وینر، q فرآیند پواسون و λ میانگین رسیدن پرش ها در واحد زمان می‌باشد. برخلاف مدل مرتون که در آن فرم ضرایب به

[۱] Fosset et al. (2020)
[۲] Wehrli & Sornette (2022)
[3] Feedback Loop
[۴] Inelastic Markets Hapothesis
[۵] Gabaix & Koijen (2021)
[۶] Merton (1976)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

صورت پیش فرض و خطی در نظر گرفته شده ا ست، در این تحقیق ما می‌خواهیم این ضرایب را بدون هیچ پیش فرضی در مورد فرم آنها و به صورت داده-محور استخراج کنیم.

از آنجائیکه مدل پخش-پرش مرتون حالت خاصی از معادله لانژون تعمیم یافته[1] می‌باشد لذا بررسی مدل مذکور در حالت کلی و بدون هیچ پیش فرض اضافی در مورد فرم ضرایب آن، معادل بررسی معادله لانژون تعمیم یافته خواهد بود و خوشبختانه معادله لانژون پایه و تعمیم یافته آن در حوزه فیزیک بطور مفصل و حتی در ابعاد بالاتر کنکاش شده(تبار[2] و همکاران، ۲۰۲۴; انوری[3] و همکاران، ۲۰۱۶; گاردینر[4]، ۱۹۸۵; ریسکن[5]، ۱۹۹۶; تبار، ۲۰۱۹) و نحوه استخراج ضرایب رانش و پخش و همچنین اندازه و نرخ پرش در معادله لانژون تعمیم یافته با روشهای مختلف بررسی شده است و نتایج تحقیق نیک اختر[6] و همکاران(۲۰۲۳) نشان می‌دهد که در بین روشهای کرامرز-مویال، کرنل، ماکزیمم در ست نمایی و هیستوگرام جهت ا ستخراج ضرایب معادله لانژون تعمیم یافته، روش کرامرز-مویال نسبت به سایر روشهای مذکور برتری دارد و این برتری مخصوصاً زمانیکه حجم نمونه کم باشد بارزتر است. بنابراین عمده هدف ما در این تحقیق، کاربرد نتایج تحقیقات حوزه فیزیک در مالی و حذف شکاف بین ابزار مدلسازی فرآیندهای تصادفی در فیزیک و مالی می‌باشد.

۳. مدل تحقیق و روش برآورد

همانطور که در مقدمه بیان شد مدل مورد استفاده در این تحقیق ، مدل پخش- پرش می‌باشد و لذا در این بخش ابتدا روش برآورد ضرایب مدل پخش را براساس ضرایب کرامرز- مویال بیان می‌کنیم و سپس نتایج را به مدل پخش-پرش تعمیم می‌دهیم و اثر وجود پرش را روی ضرایب رانش و پخش بررسی می‌کنیم و همچنین روشی عملی برای انتخاب بین مدل پخش و مدل پخش-

[1] Generalized Langevin Equation
[2] Tabar
[3] Anvari
[4] Gardiner (1985)
[5] Risken & Risken (1996)
[6] Nikakhtar

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

پرش ارائه می‌دهیم. ادعا می شود تخمین ضرایب مدل پخش-پرش به روش کرامرز– مویال نتایج بهتری نسبت به سایر روشهای تخمین از جمله روش کرنل دارد(نیک اختر و همکاران[۱]، ۲۰۲۳). در مقایســه روش ناپارامتری ما با روش های پارامتری مثل مدل های مارکوف پنهان، مدل های شــاخه‌ای[۲]، می توان گفت که در مدل های پارامتری مذکور، یک توزیع پیش فرض با پارامترهای مجهول برای حالت پنهان سیستم و همچنین یک توزیع پیش فرض برای فرآیند ثانویه که بر روی حالت پنهان ســوار می‌شــود در نظر گرفته شــده می‌شــود. برای مثال، در مدل‌های مارکوف پنهان (زوکینی و مک دونالد[۳]، ۲۰۰۹)، یک توزیع برنولی برای حالت پنهان و یک توزیع نرمال برای فرآیند ثانویه در نظر گرفته می‌شود و پارامترهای این مدل معمولاً به روش حداکثر درست نمایی تخمین زده می‌شــود. اما تخمین پارامترهای مدل مارکوف پنهان با فرض توزیع‌هایی غیر از توزیع برنولی و نرمال، نیازمند کار محاسباتی سنگینی است بطوریکه اگر بخواهیم جهش‌های مشاهده‌شده در داده‌ها را با این مدل‌ها تولید کنیم، مشــکل تخمین بیزی پارامترها بازهم پیچیده‌تر می‌شــود در حالیکه در روش ناپارامتری ما، تمام تخمین ها فقط بر ا ساس محا سبه ممان‌های شرطی می‌با شد و لذا محاسبات سبک تر و سرراست است.

۳-۱- برآورد ضرایب مدل پخش و مدل پخش- پرش

مجهولات ما در مدل پخش– پرش، در واقع پارامترهای یک معادله دیفرانســیل تصــادفی می‌باشــند که این معادله در مکانیک آماری با نام معادله لانژون تعمیم یافته شــناخته می‌شــود. ادعا می‌کنیم پارامترهای این معادله براساس ضرایب معادله کرامرز- مویال قابل استخراج می‌باشد.

معادله کرامرز – مویال یک PDE[۴] می‌باشد که توزیع احتمال فرآیندهای مارکوف را توصیف می‌کند. این PDE یک معادله دیفرانســیل مرتبه اول در زمان و مرتبه بی‌نهایت در متغیر حالت

[۱] Nikakhtar et al. (2023)
[۲] branching models
[۳] Zucchini & MacDonald
[۴] Partial differential equation

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

سیستم می‌باشد. مراحل استخراج این معادله با جزئیات در مراجع(گاردینر[۱]، ۱۹۸۵; ریسکن و ریسکن[۲]، ۱۹۹۶; تبار[۳]، ۲۰۱۹) آمده است. فرم کلی این معادله به صورت زیر می‌باشد:

رابطه ۲)

$$\frac{\delta P(x,t)}{\delta t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\delta}{\delta x}\right)^n [D^n(x,t)P(x,t)]$$

مقادیر $D^n(x,t)$ در رابطه ۲ را ضرایب کرامرز- مویال می‌نامند. با توجه به رابطه ۲، ضرایب کرامرز- مویال در حالت کلی ضرایب یک سری نامحدود می‌باشند که تحول زمانی مرتبه اول احتمال حالت سیستم($\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$) را بر حسب تحول مکانی مراتب بالاتر احتمال حالت سیستم($\frac{\partial^n P(x,t)}{\partial^n x}$) نمایش می‌دهند. با توجه به رابطه ۳ در زیر، ضرایب کرامرز- مویال بر حسب ممانهای شرطی قابل محاسبه هستند:

رابطه ۳)

$$D^n(x,t) = \frac{1}{n!}\lim_{\tau\to 0}\frac{M^{(n)}(x,t,\tau)}{\tau}$$
$$= \frac{1}{n!}\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\langle[x(t+\tau)-x(t)]^n\rangle_{|x(t)=x'}$$

۳-۲- قضیه پائولا

با توجه به نامحدود بودن سری موجود در رابطه ۲، عملاً نمی‌توان این PDE را حل کرد. لذا به نظر می‌رسد باید دنبال حالات خاصی از این معادله باشیم که ما را به یک سری محدود و در نتیجه یک معادله قابل حل می‌رساند. قضیه پائولا بیان می‌کند که در کل فقط سه حالت ممکن برای معادله کرامرز- مویال وجود دارد(پائولا[۴]، ۱۹۶۷):

۱- n=۱: سری ضرایب در جمله اول قطع می‌شود.

۲- n=۲: سری ضرایب در جمله دوم قطع می‌شود.

۳- n=∞: سری ضرایب قطع نمی‌شود.

[۱] Gardiner (1985)
[۲] Risken & Risken (1996)
[۳] Tabar (2019)
[۴] Pawula (1967)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

خلاصه قضیه پائولا بدین صورت است که اگر فرض $D^2 = 0$ را بپذیریم آنگاه سری در همان جمله اول قطع می‌شود و این به معنی تعینی بودن سیستم می‌باشد. اگر $D^2 \neq 0$ و $D^4 = 0$ را بپذیریم آنگاه سری حداکثر دو جمله خواهد داشت و فرآیند تصادفی، پیوسته و پخشی می‌باشد. اگر $D^4 \neq 0$ باشد آنگاه سری قطع نخواهد شد و لذا فرآیند ناپیوسته بوده و علاوه بر پخش دارای پرش نیز می‌باشد.

۳-۳- معادله لانژون و ارتباط آن با معادله فوکر-پلانک

معادله کرامرز- مویال در حالت خاص $D^2 \neq 0$ و $D^4 = 0$ به معادله فوکر- پلانک تبدیل می‌شود:

$$\frac{\delta P(x,t)}{\delta t} = -\frac{\delta}{\delta x}\left(D^1(x,t)P(x,t)\right) + \frac{\delta^2}{\delta^2 x}\left(D^2(x,t)P(x,t)\right)$$ رابطه ۴)

و همچنین فرم کلی معادله لانژون به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(x,t) + \beta(x,t)\eta(t)$$ رابطه ۵)

که در آن $\alpha(x,t)$ را جمله رانش و $\beta(x,t)$ را ضریب پخش می‌نامند و $\eta(t)$ یک نویز سفید با میانگین صفر و تابع همبستگی دلتای دیراک می‌باشد. فرآیند وینر حالت خاصی از معادله لانژون می‌باشد که با انتخاب مقادیر $\alpha(x,t)=0$ ، $\beta(x,t)=1$ و $x(t)=W(t)$ بدست می‌آید:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta(t)$$ رابطه ۶)

بدین ترتیب معادله لانژون را می‌توان برحسب فرآیند وینر به فرم زیر نوشت:

$$dx(t) = \alpha(x,t)dt + \beta(x,t)dW(t)$$ رابطه ۷)

حال ارتباط معادله لانژون با معادله فوکر-پلانک را با این گزاره بیان می‌کنیم:" اگر دینامیک یک فرآیند تصادفی از معادله لانژون پیروی کند آنگاه تابع توزیع احتمال چنین فرآیندی در معادله

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

فوکر-پلانک صـــدق می‌کند". اثبات این گزاره و ارتباط بین ضـــرایب معادله فوکر-پلانک و ضرایب معادله لانژون که به صورت زیر می‌باشد، در(تبار، ۲۰۱۹) آمده است:

$$D^1(x,t) = \alpha(x,t)$$ رابطه ۸)

$$D^2(x,t) = \frac{1}{2}\beta^2(x,t) \Rightarrow \beta(x,t) = \sqrt{2D^2(x,t)}$$ رابطه ۹)

روابط ۸ و ۹ بیان می‌کنند که برای اســتخراج ضـــرایب معادله لانژون، نیاز به ضـــرایب معادله فوکر-پلانک می‌باشد که آن هم از روی ممان‌های شرطی قابل محاسبه می‌باشد.

۳-٤- مدل پخش- پرش یا معادله لانژون تعمیم یافته

علت بررســی معادله لانژون و تعمیم یافته آن در این تحقیق این اســت که اکثر مدلهای موجود در مباحث مالی، حالت خاصی از معادله لانژون می‌باشند از جمله معادله بلک- شولز برای بررسی دینامیک قیمت سهام، معادله CIR(Cox-Ingersoll-Ross) برای بررسی دینامیک نرخ بهره و مدل هســتون برای بررســی نوســانات در بازارهای مالی. مدلهای پخش- پرش نیز که امروزه با پیش فرضهای متنوع در مورد ضرایب آن جهت مدلسازی قیمت مورد استفاده قرار می‌گیرند در حقیقت حالت خاصی از معادله لانژون تعمیم یافته می‌باشند که علاوه بر فرآیند وینر شامل فرآیند پواسون نیز می‌باشد. خود معادله لانژون براساس معیار پیوستگی لیندبرگ[۱] (تبار، ۲۰۱۹) یک مدل پیوسته به حساب می‌آید اما براساس معیار مذکور معادله لانژون تعمیم یافته یک مدل ناپیوسته می‌باشد و لذا گزینه مناسبی برای مدلسازی فرآیندهای پخش-پرش می‌باشد.

با الهام از مدل مرتون(۱۹۷۶) که در بخش قبل به آن اشـاره شـد، مدل پخش- پرشـی که ما در این تحقیق بررسـی خواهیم کرد به فرم معادله لانژون تعمیم یافته زیر می‌باشـد(انوری و همکاران[۲]، ۲۰۱۶):

$$dx(t) = \alpha(x,t)dt + \beta(x,t)dW(t) + \xi dJ(t)$$ رابطه ۱۰)

[۱] Lindeberg continuity condition

[۲] Anvari et al., 2016

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

جمله $\xi dJ(t)$ در رابطه ۱۰، تفاوت بین معادله لانژون و لانژون تعمیم یافته می‌باشد و جهت نمایش پرشها آورده شده است. $J(t)$ فرآیند پواسون با نرخ پرش $\lambda(x,t)$ و متغیر تصادفی ξ بیانگر اندازه پرشها با توزیع نرمال $N(0, \sigma_\xi^2)$ هست و σ_ξ^2 دامنه پرش می‌باشد. از نظر مفاهیم مالی، استخراج دامنه و نرخ پرش بزرگ برای یک فرآیند مالی معادل وجود دم سنگین در توزیع آن و بعبارتی معادل احتمال بالای زیانهای بزرگ می‌باشد.

ضریب رانش بیانگر میانگین تغییرات بازده در بازه کوتاه مدت بین دو شوک برونزا می‌باشد. ضریب پخش نشان دهنده شدت نوسانات نرمال یا نوسانات بازده در بازه‌ای از تحول زمانی فرآیند می‌باشد که فیدبک مثبت ضعیف بر رفتار عوامل بازار حاکم است. در مقابل اما اندازه پرش مربوط به تغییرات غیرنرمال فرآیند یا تغییرات در زمان اتفاق پواسونی می‌باشد که در اینجا اتفاق پواسونی، پدیده قفل شدن نقدشوندگی بازار (عدم توانایی خرید و فروش سریع یک دارایی بدون تغییر قیمت آن) می‌باشد.

اثر بازار به صورت متوسط تغییر قیمت یک دارایی از زمان شروع تا پایان یک معامله بزرگ تعریف می‌شود و براساس نظریه نقدشوندگی پنهان[۱](بوشود وهمکاران[۲]، ۲۰۱۸)، قفل شدن نقدشوندگی بازار پس از انجام یک معامله بزرگ، باعث ایجاد اثر بازار بزرگ می‌شود. لذا با توجه به تعریف اثر بازار، اندازه پرش در معادله لانژون تعمیم یافته یک گزینه خوب برای کمی سازی آن می‌باشد.

حال می‌خواهیم ببینیم که آیا با وجود پرش در فرآیند، ضرایب رانش و پخش همان مقادیر قبلی که در معادله لانژون پایه استخراج شده‌اند می‌باشد یا اینکه وجود پرش باعث تغییر این ضرایب می‌شود؟

پارامترهای مدل پخش- پرش براساس ممانهای اول، دوم، چهارم و ششم به صورت زیر استخراج می‌شوند(گاردینر، ۱۹۸۵; ریسکن و ریسکن، ۱۹۹۶; تبار، ۲۰۱۹):

---

[۱] Latent Liquidity Theory

[۲] Bouchaud et al. (2018)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

رابطه ۱۱)

$$\alpha(x,t) = \frac{M^1(x,t)}{\tau} = D^1(x,t)$$

رابطه ۱۲)

$$\beta(x,t) = \sqrt{\frac{M^2(x,t)}{\tau} - \frac{\left(M^4(x,t)\right)^2}{3M^6(x,t)}} = \sqrt{2D^2(x,t) - \lambda(x,t)\sigma_{\xi}{}^2(x,t)}$$

رابطه ۱۳)

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{M^{(۶)}(x,t)}{5M^{(۴)}(x,t)}$$

رابطه ۱۴)

$$\lambda(x,t) = \frac{M^{(۴)}(x,t)}{3\sigma_{\xi}^4}$$

با توجه روابط ۱۱ و ۱۲ در صورت وجود پرش در فرآیند، ضریب رانش باز هم برابر ضریب اول کرامرز- مویال می‌باشد، اما ضریب پخش کمتر از مقدار آن در فرآیند پخش محض می‌باشد.

۳-۵- معیاری عملی برای انتخاب بین مدل پخش و مدل پخش- پرش

برای انتخاب بین مدل پخش و مدل پخش- پرش، براساس تئوری به قضیه پائولا مراجعه می شود و ادعا می‌شود که اگر ضریب چهارم کرامرز- مویال صفر شود آنگاه ضرایب کرامرز- مویال بالاتر از مرتبه دوم وجود نخواهد داشت و لذا دینامیک فرآیند به صورت یک معادله پخش خواهد بود و در غیر این صورت باید مدل پخش- پرش جهت مدلسازی فرآیند مورد مطالعه انتخاب شود.

اما از نظر عملی ممکن است معیار پائولا باعث خطا در انتخاب مدل شود و علت آن به مساله گسسته سازی فرآیند مورد مطالعه و فرکانس محدود نمونه برداری در عمل بر می گردد. یعنی اگر حتی فرآیند اصلی از نظر تئوری پیوسته هم باشد، هنگام نمونه برداری با فرکانس محدود، مشاهدات ما دارای پرش خواهند بود و بسته به نرخ نمونه برداری ممکن است پرشهایی با دامنه بزرگ در مشاهدات وجود داشته باشند در حالیکه در فرآیند واقعی چنین پرشهایی وجود ندارد و

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

لذا ممکن است فرآیند تصادفی پیوسته را به اشتباه، ناپیوسته تشخیص دهیم. در نتیجه وجود ضریب کرامرز- مویال مرتبه چهار غیر صفر دلیل محکمی برای ناپیوسته بودن فرآیند زیربنایی نمی‌باشد.

به عنوان یک راهکار عملی جهت تشخیص صحیح نوع فرآیند زیربنایی، رابطه‌ای به فرم زیر بین ممانهای شرطی دوم و چهارم برای یک فرآیند پخش- پرش استخراج شده است(لنرتز و همکاران[۱]، ۲۰۱۸):

رابطه ۱۵)

$$\frac{M_J^{(۴)}(x,t)}{3\left(M_J^{(۲)}(x,t)\right)^2} \simeq \frac{\langle\xi^4\rangle\lambda(x)\tau}{3\left(\beta^2+\langle\xi^2\rangle\lambda(x)\right)^2\tau^2} \sim \frac{1}{\tau}$$

براساس رابطه ۱۵، برای یک فرآیند پخش- پرش، نسبت $\frac{M_J^{(4)}(x,t)}{3\left(M_J^{(2)}(x,t)\right)^2}$ با کاهش τ واگرا می شود در حالیکه این نسبت برای یک فرآیند پخش محض برابر یک می‌با شد. بدین ترتیب اگر نسبت مذکور را از روی داده‌ها محا سبه و برحسب τ ر سم کنیم و منحنی حا صل یک خط افقی باشد آنگاه ادعا می‌شود فرآیند زیربنایی یک فرآیند پخش می‌باشد ولی اگر منحنی حاصل با کاهش مقدار τ واگرا شود آنگاه ادعا می‌شود فرآیند زیربنایی یک فرآیند پخش- پرش می‌باشد.

معیار جالب دیگری که توسط (لنرتز و همکاران، ۲۰۱۸) برای تشخیص نوع فرآیند معرفی شده ا ست، کمیت $Q(x)$ می‌با شد. مقدار این کمیت با ا ستفاده از روابط ا ستخراج شده برای ممان‌های شرطی چهارم و ششم به صورت زیر می‌باشد:

رابطه ۱۶)

$$Q(x) = \frac{M^{(6)}(x)}{5M^{(4)}(x)} \approx \begin{cases} \tau\beta^2(x) & \text{برای پخش} \\ \sigma_\xi^2(x) & \text{برای پرش} \end{cases}$$

[۱] Lehnertz et al., 2018

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

با توجه به رابطه ۱۶، انتظار داریم برای یک فرآیند پخش-پرش، کمیت $Q(x)$ مستقل از τ و یک خط افقی باشد در حالیکه برای فرآیند پخش محض، $Q(x)$ با τ رابطه خطی دارد و در حقیقت شیب منحنی Q-τ برابر مجذور ضریب پخش در فرآیند پخش محض می‌باشد.

٤. نتایج برآورد

در این بخش نتایج استفاده از روش کرامرز-مویال در تخمین پارامترهای مدل پخش پرش آورده شده است.

٤-١- ارزیابی دقت روش کرامرز- مویال

در ابتدای این بخش جهت ارزیابی دقت روش ارائه شده، یک سیگنال تصنعی[1] تولید می‌کنیم که دینامیک آن از معادله لانژون تعمیم یافته معرفی شده در رابطه ۱۰ به صورت زیر پیروی می‌کند:

$$\begin{cases} dX_t = -10X_t + 2X_t dW_t + \xi dJ \\ \xi \sim Normal(0,1), \qquad \lambda = 0.1 \end{cases}$$ رابطه ۱۷)

روش حل عددی مورد استفاده برای تولید سیگنال تصنعی از روی معادله موجود در رابطه ۱۷، روش اویلر-ماریاما (پلیتن و بروتی-لیبراتی[2]، ۲۰۱۰) بوده و تعداد داده های تولید شده برابر 10^7 می‌باشد.

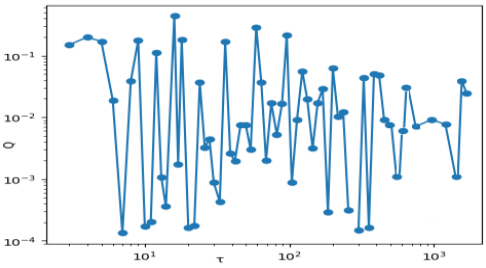
با در نظر گرفتن این سیگنال تصنعی به عنوان یک فرآیند ناشناخته، اولین قدم در بازسازی آن انتخاب بین مدل پخش محض و مدل پخش-پرش به عنوان دینامیک زیربنایی این فرآیند مجهول می‌باشد. همانطور که بیان شد رفتار کمیت Q معیار خوبی برای انتخاب بین این دو مدل می‌باشد. نمودار Q مربوط به این فرآیند در شکل ۱ آمده است:

[1] منظور از سیگنال تصنعی(Synthetic Signal) سیگنالی است که دینامیک آن را خودمان تعریف می کنیم و لذا برای ما فرآیندی شناخته شده می‌باشد.

[2] Platen & Bruti-Liberati, 2010

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]



شکل ۱. منحنی Q-τ برای داده‌های تصنعی[۱]

با توجه به نمودار Q اســتخراج شــده می‌توان نتیجه گرفت که فرآیند مورد مطالعه باید با مدل پخش-پرش مدلسازی شود و این نتیجه با توجه به اینکه سیگنال تصنعی ما نیز دارای پرش می‌باشد مورد انتظار بود. توزیع احتمال مورد اســتفاده جهت محاســبه ممان‌ها، با اســتفاده از روش تخمین چگالی کرنل با کرنل‌های ایپانچنیکو[۲] استخراج شده است(نادارایا[۳]، ۱۹۶۴; واتسون[۴]، ۱۹۶۴). نتایج تخمین زده شده برای نرخ و دامنه پرش در جدول ۱ آمده است:

جدول ۱. تخمین مقادیر نرخ و دامنه پرش

	λ	σ_ξ^2
مقدار واقعی	۰/۱	۱
مقدار تخمین زده شده	۰/۱۰۶۶	۰/۹۴۸۰

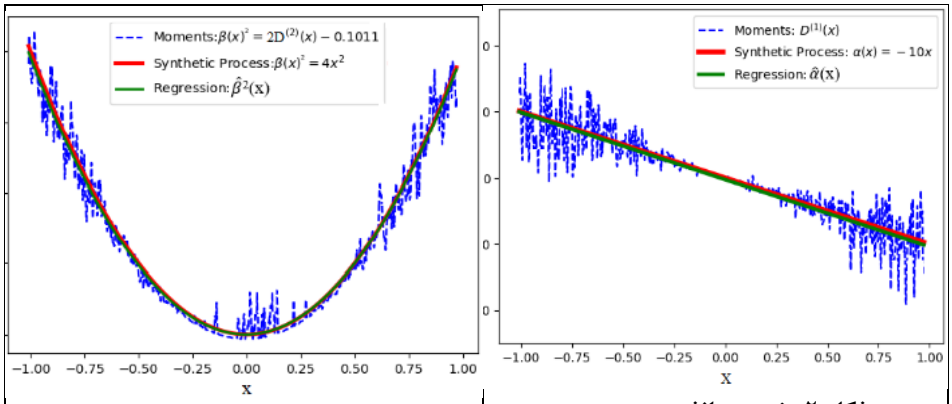
لازم به ذکر است تمامی محاسبات و استخراج نمودارهای موجود در این مقاله در محیط پایتون انجام شده ا ست و به طور نمونه محا سبه ممان‌ها و تخمین چگالی مورد نیاز برای ا ستخراج مقادیر نرخ و دامنه پرش آورده شده در جدول ۱ توسط پکیج‌های آماری موجود در کتابخانه scipy.stats انجام شـده اسـت. نتایج جدول ۱ نشـان می‌دهد تخمین نرخ پرش نسـبت به مقدار واقعی آن اندکی

[۱] Synthetic data
[۲] Epanechnikov
[۳] Nadaraya (1964)
[۴] Watson (1964)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

خطای بیش برآورد دارد در حالیکه تخمین اندازه پرش دارای خطای کم برآورد می‌باشـــد. انجام چندین مورد تخمین عملی با روش ممانهای شـرطی نشـان می‌دهد که هنگام اسـتفاده از این روش، نوع خطا برای پارامتر های نرخ و اندازه پرش تغییر نمی کند یعنی در مورد تخمین اندازه پرش همواره شـــاهد خطای کم برآورد و در مورد تخمین نرخ پرش همواره شـــاهد خطای بیش برآورد هستیم و این نکته از نظر عملی در تنظیم دقیق پارامترهای مدل مفید می‌باشد چرا که به عنوان مثال، پس از برآورد مقدار نرخ پرش از روی داده‌ها و با توجه به وجود خطای بیش برآورد در مورد این پارامتر، می توان با اتخاذ مقادیر کوچکتر برای آن و انجام آزمون خودســـازگاری(که در بخش بعدی معرفی می‌شود) نسبت به انتخاب دقیق مقدار این پارامتر تصمیم گیری کرد.

نمودارهای مربوط به ضـــرایب رانش و پخش، براســـاس مقادیر موجود در فرآیند تصـــنعی بیان شده در رابطه ۱۷ (—) و براساس مقادیر استخراج شده به روش کرامرز- مویال (---) و همچنین منحنیهای تخمین زده شـــده برای این ضـــرایب از روی داده‌های خروجی کرامرز-مویال(—) در شکلهای ۲ و ۳ آمده است:



شکل ۲. ضریب رانش

شکل۳. ضریب پخش

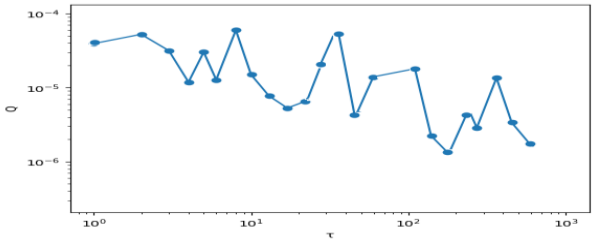
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

با توجه به شکل۲، منحنی تخمین زده شده براساس ضرایب کرامرز- مویال(سبز رنگ) بر منحنی واقعی $\alpha(x)= -10x$ (قرمز رنگ) منطبق می باشد. همچنین با توجه به شکل۳، منحنی $\hat{\beta}(x)^2=4x^2$ که براساس ضرایب کرامرز- مویال تخمین زده شده (سبز رنگ) مقدار واقعی ضریب پخش یعنی $\beta(x)=2x$ (قرمز رنگ) را تایید می کند.

٤-۲- کاربرد عملی: استخراج دینامیک قیمت رمزارز اتریوم

در این بخش به عنوان یک نمونه از کاربرد روش کرامرز- مویال در استخراج دینامیک فرآیندهای تصادفی واقعی، فرآیند قمیت رمزارز اتریوم را در نظر می گیریم. یک دلیل انتخاب رمزارز مذکور این بود که در روش کرامرز-مویال جهت استخراج دقیق‌تر پارامترها، نیاز به تعداد زیاد داده می باشد و لذا با توجه به قدمت این رمزارز نسبت به رمزارزهای جدید و وجود تعداد کافی مشاهدات برای آن(حدود سه میلیون داده) مشکل حجم محدود داده حل خواهد شد. البته مساله وجود حجم کافی داده با استفاده از داده‌های بیت‌کوین نیز قابل حل می‌باشد و ترجیحی بین این دو نیست. دلیل دوم استفاده از این رمزارز، رایگان بودن داده‌های قیمتی آن حتی در رنج یک دقیقه می‌باشد بطوریکه در این تحقیق از داده‌های موجود در سایت cryptoarchive.com و با نرخ نمونه برداری یک دقیقه از ۱۷ اکتبر ۲۰۱۷ تا ۲ فوریه ۲۰۲۴ استفاده شده است. با توجه به غیرایستا بودن فرآیند قیمت، از داده‌های بازده لگاریتمی آن برای انجام محاسبات استفاده شده است. مشابه مراحل انجام شده در بخش قبل، دوباره ابتدا مدل مناسب برای فرآیند زیر بنایی تولید داده را با استفاده از کمیت Q تعیین می کنیم. رفتار کمیت Q نسبت به τ برای این فرآیند در شکل۴ آمده است:



شکل٤. منحنی Q-τ برای داده‌های واقعی

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

دوباره با توجه به شکل ۴ کمیت Q مستقل از τ و افقی می‌باشد و لذا مدل مناسب برای این فرآیند، مدل پخش- پرش می‌با شد. مقادیر ضریب رانش، ضریب پخش، دامنه پرش و نرخ پرش استخراج شده به روش کرامرز- مویال برای دوره‌های روزانه در جدول ۲ آمده است:

جدول ۲. تخمین پارامترهای مدل پخش-پرش

ضریب رانش	-۱۴۰۴x
ضریب پخش	۳۱/۳x
دامنه پرش	۰/۰۰۰۰۰۳
نرخ پرش	۱۲۹۰

تفسیر مقدار ضریب رانش استخراج شده به طور غیرمستقیم و براساس تعریف تابع پتانسیل می‌باشد. تابع پتانسیل که الف) محدود کننده رفتار یک فرآیند، ب) شکل‌دهنده تعادلهای پایدار و ناپایدار و پ) تعیین‌کننده میزان تاب آوری سیستم می باشد از روی ضریب اول کرامرز- مویال(ضریب رانش) قابل استخراج می‌باشد چرا که ضریب اول کرامرز-مویال برابر منفی گرادیان تابع پتانسیل می‌باشد(آرانی[1] و همکاران، ۲۰۲۱). برای مورد عملی بررسی شده در این تحقیق و با توجه به نتایج موجود در جدول ۲، ضریب رانش به صورت یک تابع خطی استخراج شده است و لذا تابع پتانسیل مربوطه یک سهمی درجه دوم خواهد بود و در نتیجه فرآیند مورد مطالعه یک تعادل پایدار در نقطه صفر خواهد داشت(شکل ۵). نکته جالب اینکه هرچه ضریب رانش استخراج شده کوچک‌تر و در نتیجه سهمی حاصل برای تابع پتانسیل عریض‌تر باشد، انتظار داریم که دامنه نوسانات حول تعادل بزرگ باشد که معادل نرخ میرایی کوچک، زمان بازگشت به میانگین طولانی و آنتروپی بالا برای فرآیند می‌باشد و برعکس، هر چه سهمی حاصل باریک‌تر باشد، انتظار داریم که دامنه نوسانات حول تعادل کوچک باشد.

ضریب پخش استخراج شده برای فرآیند واقعی مورد مطالعه، نسبت به ضریب پخش فرآیند تصنعی بخش قبل مقدار بزرگتری دارد و لذا با مقایسه این پارامتر برای دو فرآیند مذکور می‌توان نتیجه گرفت که در فرآیند واقعی مورد مطالعه، حلقه بازخورد مثبت قوی‌تری نسبت به فرآیند

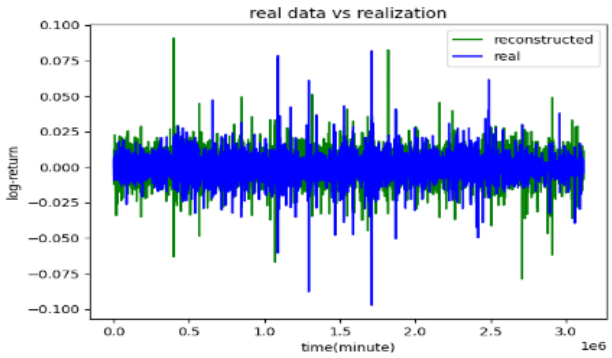
[1] Arani et al. 2021

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

تصنعی معرفی شده شکل می گیرد و بعبارتی دیگر اگر نویز یکسانی به هر دو سیستم فوق وارد شود آنگاه تقویت نویز در سیستمی که ضریب پخش بزرگتری دارد شدیدتر خواهد بود و بعبارت دیگر هنگام بروز شوک، فرآیندی که ضریب پخش بزرگتری دارد دامنه نوسانات بزرگتری را حول تعادل تجربه خواهد کرد. با توجه به تفاسیر بیان شده برای ضرایب موجود در رابطه ۱۰ در بخش قبل، اگرچه نرخ پرشها بالا ست ولی دامنه پرش کوچک استخراج شده در جدول ۲ نشان می دهد که بازار این رمزارز عمق زیاد و نقد شوندگی بالایی دارد و بعبارت دیگر احتمال قفل شدن بازار در مورد این رمزارز پایین می‌باشد.

با حل عددی معادله دیفرانسیل تصادفی حاصل از نتایج جدول۲، می‌توان مسیرهای تصادفی این فرآیند را تولید کرد. روش حل عددی مورد استفاده برای انتگرال‌گیری از دینامیک حاصل، باز هم مثل بخش قبل روش اویلر-ماریاما می‌باشد. یک نمونه از مسیر تصادفی تولید شده برای بازده لگاریتمی به همراه مسیر داده‌های واقعی در شکل ۵ آمده است.



شکل۵. بازده لگاریتمی شبیه سازی شده (—) در مقابل بازده لگاریتمی داده‌های واقعی(—)

٤-۳- آزمون خودسازگاری[1] برای ارزیابی صحت بازسازی

آزمون خودسازگاری برای بررسی صحت بازسازی یک سیگنال ناشناخته می‌باشد. در سیگنالهای تعینی[2] پس از بازسازی، ما با یک منحنی مسیر[3] مشخص مواجه هستیم اما پس از

[1] Self-consistency check
[2] deterministic
[3] Trajectory

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

باز سازی سیگنالهای تصادفی ما مسیرهای تصادفی مختلفی از سیگنال باز سازی شده را خواهیم داشت بطوریکه به ازای هر مقدار جمله تصادفی موجود در دینامیک سیستم یک تحقق[1] جدید از فرآیند خواهیم داشت. لذا برای بررسی صحت بازسازی نیاز به مقایسه توزیع احتمال سیگنال اصلی با سیگنال بازسازی شده می‌باشد.

دو آزمون مشهور برای بررسی خودسازگاری، آزمون واگرایی کولبک-لیبلر[2] (کوور[3]، ۱۹۹۹) و آزمون واگرایی جنسن-شانون[4] (لین[5]، ۱۹۹۱; مانینگ و شاتز[6]، ۱۹۹۹) می‌باشند. در این آزمونها هرچه مقدار واگرایی محاسبه شده بین توزیع احتمال سیگنال اصلی و سیگنال بازسازی شده به صفر نزدیکتر باشد بیانگر خوبی برازش ضرایب معادله دیفرانسیل تصادفی می‌باشد بطوریکه مقدار صفر برای واگرایی، بیانگر یکسان بودن دو توزیع می‌باشد. KL-div به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$KL(P||Q) = -\sum P_i \log\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) = \sum P_i \log\left(\frac{Q_i}{P_i}\right)$$ رابطه ۱۸)

شهود این کمیت را می‌توان چنین بیان کرد که در صورتیکه احتمال یک پیشامد براساس توزیع P بالا ست اما احتمال همان پیشامد براساس توزیع Q پایین است آنگاه مقدار بزرگی برای کمیت KL شاهد خواهیم بود که بیانگر واگرایی بزرگ بین دو توزیع می‌باشد و همچنین اگر احتمال یک پیشامد براساس توزیع P پایین باشد اما احتمال همان پیشامد براساس توزیع Q بالا باشد باز هم واگرایی بین دو توزیع بزرگ گزارش خواهد شد اما نه به بزرگی حالت قبل. یعنی در آزمون KL-div فرق می کند که کدام توزیع به عنوان توزیع مرجع در نظر گرفته شود و به عبارتی این آزمون متقارن نیست.

اما بر خلاف آزمون KL-div ، آزمون JS-div که به صورت زیر و از روی KL-div ساخته می‌شود متقارن می‌باشد:

[1] realization
[2] Kullback-Leibler
[3] Cover (1999)
[4] Jensen-Shannon
[5] Lin (1991)
[6] Manning & Schutze (1999)

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

رابطه ۱۹)

$$\begin{cases} JS(P||Q) = \frac{1}{2}(KL(P||M) + KL(Q||M)) \\ M = \frac{1}{2}(P+Q) \end{cases}$$

مزیت آزمون JS-div نسبت به KL-div علاوه بر متقارن بودن آن((JS(P || Q)=JS(Q || P))، این است که مقدار این کمیت برای لگارتیم مبنای۲ در بازه [۰,۱] قرار دارد. مقدار صفر این کمیت بیانگر یکسان بودن دو توزیع و مقدار یک آن بیانگر عدم تشابه دو توزیع می‌باشد.

نتایج آزمونهای KL-div و JS-div برای بررسی صحت بازسازی انجام شده در جدول ۳ آورده شده است:

جدول ۳. نتایج آزمونهای خودسازگاری

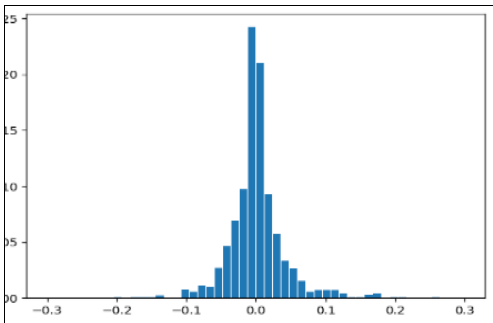
KL-div	۰/۰۰۴
JS-div	۰/۰۳۶

مقادیر نزدیک به صفر هر دو آزمون خودسازگاری، نشان از دقت روش کرامرز-مویال در بازسازی سیگنال ناشناخته دارد. حال پس از اطمینان از صحت بازسازی دینامیک فرآیند مورد مطالعه از روی داده‌ها، می‌توان با استفاده از دینامیک استخراج شده به سوالهای رایج در مورد فرآیندهای تصادفی پاسخ داد. در مسایل فیزیک آماری و سیستمهای پیچیده با توجه به درجات آزادی بالا و عدم قطعیت موجود، صحبت از تعیین مسیر مشخص برای حرکت یک ذره موجود در سیستم نمی‌باشد بلکه هدف بررسی رفتار ماکروسکوپی سیستم می‌باشد. به عنوان مثال در مورد آب، مساله تعیین مسیر دقیق حرکت یک مولکول آب نیست بلکه مساله این است که چه موقع آب به جوش می‌آید(کی گذار فاز اتفاق می‌افتد)؟ یا پس از چه مدتی آب به دمای مشخصی می‌رسد؟ در مورد بازار نیز به عنوان یک سیستم پیچیده مساله، تعیین مسیر دقیق حرکت قیمت نیست بلکه سوالهای صحیح در این حوزه از این جنس هستند: حداکثر زیان در یک دوره خاص چقدر است؟ با چه احتمالی قیمت دارایی در یک دوره معین از مرز مشخصی عبور می‌کند؟ احتمال اینکه قیمت در روز مشخصی از مرز تعیین شده عبور کند چقدر است؟ اینها نمونه مسائلی

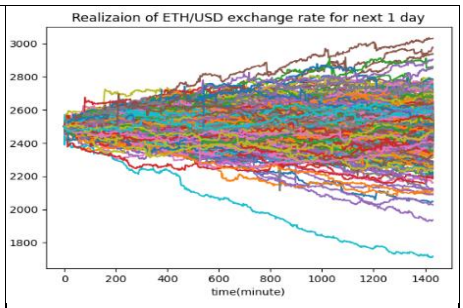
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

هستند که با در دست داشتن دینامیک فرآیند قابل پاسخگویی هستند. در ادامه نمونه‌ای از مسیرهای تصادفی فرآیند مورد مطالعه(با مشخصات جدول ۲) با نقطه شروع x=۲۵۰۰ و در افق زمانی یک روزه در شکل۶ و همچنین توزیع احتمال زیانهای روزانه با شبیه سازی دینامیک این فرآیند به تعداد ۱۰۰۰۰ بار در شکل۷ آمده است. با توجه به نتایج شبیه سازی، دامنه بزرگ نوسانات روزانه و احتمال زیانهای روزانه بزرگ(حدود ۲۰ درصد) نشان از پر ریسک بودن این بازار دارد.



شکل۷. احتمال زیانهای رزوانه



شکل٦. مسیرهای تصادفی فرآیند ETH/USD

با شبیه سازی به تعداد ۲۱۶۴ بار(برابر با تعداد روزهای داده‌های واقعی)، مقدار کوانتیل ۹۹,۹ درصد بازده و زیان روزانه، میانگین و انحراف معیار استاندارد بازده روزانه بدست آمده و نتایج در جدول۴ به همراه مقادیر مربوطه برای داده‌های واقعی آمده است:

جدول٤. مقایسه نتایج شبیه سازی با مقادیر واقعی

	شبیه سازی	داده های واقعی
کوانتیل ۹۹ درصد بازده روزانه	۰/۲۲۸۶	۰/۲۱۰۹
کوانتیل ۹۹ درصد زیان روزانه	۰/۲۰۸۹	۰/۲۰۸۳
میانگین زیانهای روزانه	۰/۰۰۰۶۵	۰/۰۰۰۷۹
انحراف معیار استاندارد زیانهای روزانه	۰/۰۴۳۶	۰/۰۴۷۷

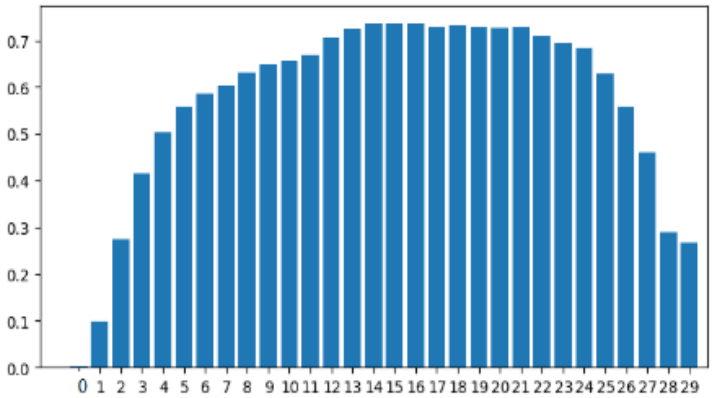
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

مساله عبور مقدار فرآیند تصادفی از یک مرز مشخص در زمان معین به مساله اولین زمان گذر[1] مشهور است. محاسبه توزیع احتمال زمانهای اولین گذر برای یک فرآیند پخش محض به صورت تحلیلی انجام شده است و بر این اساس احتمال اینکه فرآیند پخش با شروع از نقطه اولیه x_0، در زمان t از مرز a عبور کند برابر است با (تبار، ۲۰۱۹):

$$f(t) = \frac{|a - \mathrm{x}_0|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(a-\mathrm{x}_0)^2}{2t}}$$ رابطه ۲۰)

اما در مورد فرآیندهای پخش-پرش در حالت کلی جواب تحلیلی ارائه نشده است لذا همانطور که در مقدمه بیان شد چاره کار در این مورد، محاسبه توزیع احتمال مذکور براساس شبیه سازی می‌باشد. برای فرآیند مورد مطالعه ما، با فرض اینکه پس از یک شوک خارجی مقدار فرآیند به نقطه x=۲۵۰۰ جهش کرده باشد و با فرض اینکه بین دو شوک خارجی به اندازه کافی فاصله زمانی وجود داشته باشد آنگاه، توزیع احتمال زمان اولین گذر این فرآیند از مرز x=۳۰۰۰ برای یک دوره ۳۰ روزه و با فرض قرار داشتن در فاز صعودی بازار، به صورت نمودار شکل ۸ بدست آمده است:



شکل ۸. توزیع احتمال زمان اولین گذر

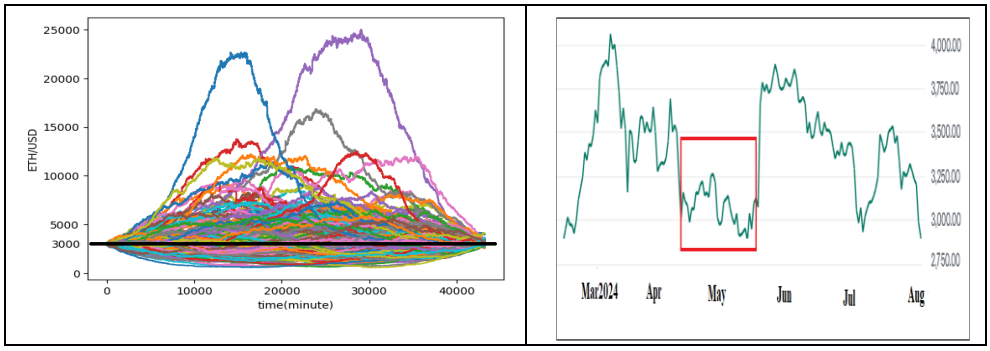
[1] First Passage Time

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

نتایج نمودار ۸ که با شبیه سازی دینامیک استخراج شده به تعداد ۱۰۰۰ بار به دست آمده است نشـــان می‌دهد که با احتمال ۷۰ درصـــد، اولین گذر قیمت دارایی از مرز x=۳۰۰۰ بین روزهای چهاردهم تا بیســت و یکم خواهد بود و نگاهی به نمودار قیمت این دارایی در ســایت یاهوفاینانس این نتیجه را تائید می کند بطوریکه با توجه به نمودار ETH-USD در یاهو فاینانس، قیمت این دارایی در تاریخ دهم فوریه ۲۰۲۴ حدود ۲۵۰۰ دلار بوده و با شـروع از این نقطه، اگرچه قیمت در تاریخ ۲۰ فوریه سطح ۳۰۰۰ دلار را لمس کرده است ولی قادر به شکستن سد نبوده و اولین گذر قطعی قیمت این دارایی از مرز ۳۰۰۰ دلار در تاریخ بیســت و چهارم فوریه ۲۰۲۴ می‌باشـد. کاربرد اخیر که مساله گذار مقدار فرآیند از یک مرز مشخص می‌باشد نمونه‌ای از مسایلی است که اهمیت استخراج دینامیک یک فرآیند تصادفی را نسبت به استخراج توزیع احتمال آن نشان می‌دهد چرا که همانطور که قبلاً در مقدمه بیان کردیم دو فرآیند با توزیع احتمال یکســـان، می‌توانند دینامیک متفاوتی داشته باشند و لذا با صرف داشتن توزیع احتمال فرآیند، سوالات زیادی در مورد رفتار آن فرآیند بی پاسخ می‌ماند.

به عنوان تاییدی دیگر بر صـــحت بازســـازی انجام شـــده، از روی داده‌های تاریخی موجود در ســـایت یاهوفاینس(شـــکل ۹) نمودار ETH-USD را در بازه یک ماهه(پنجره قرمز) از ۱۳ آوریل ۲۰۲۴ تا ۱۳ می ۲۰۲۴ در نظر می گیریم. با توجه به اینکه بازه مذکور بین دو شـــوک بزرگ قرار گرفته است، انتظار داریم مدل ما بتواند دینامیک کوتاه مدت مشاهده شده در این بازه را توضیح دهد. شکل ۱۰ مربوط به نتایج شبیه سازی فرآیند باز سازی شده با نقطه شروع x=3000 (مقدار واقعی فرآیند در ۱۳ آوریل ۲۰۲۴) و افق زمانی یکماهه می‌باشد.



[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

شکل ۹. نمودار تاریخی ETH-USD	**شکل۱۰. شبیه سازی دینامیک استخراج شده با قیمت اولیه ۳۰۰۰ دلار و افق زمانی یکماهه**

نتایج شبیه سازی(شکل ۱۰) نشان می‌دهد که قیمت این دارایی با شروع از مقدار اولیه ۳۰۰۰ دلار، علیرغم اینکه می‌تواند مسیرهای تصادفی مختلفی را در طول بازه یکماهه داشته باشد ولی در نهایت به مقدار اولیه خود یعنی سطح ۳۰۰۰ دلار برخواهد گشت. جهت تفسیر نتیجه فوق، ابتدا یاد آوری می‌کنیم که بررسی سایت بلومبرگ نشان می‌دهد دربازه زمانی مذکور خبر مهم مرتبطی با این رمزارز منتشر نشده است لذا با توجه به آنچه قبلاً براساس دیدگاه استاندارد در اقتصاد بیان کردیم، پس از بروز شوک خارجی اول و با توجه به تعدیل سریع قیمتها براساس این دیدگاه، انتظار داریم تعادل جدیدی شکل گیرد که همان مقدار تعادلی ۳۰۰۰ دلار می‌باشد. باز همانطور که در بخش نظری بیان شد اگر تغییرات قیمت صرفاً ناشی از شوکهای خارجی باشد آنگاه در بازه بین این دو شوک بزرگ ما باید صرفاً شاهد رفتار اختلالی[1] در حرکت قیمت می‌بودیم در حالیکه نمودار قیمت واقعی، رفتاری غیراختلالی و با دامنه بزرگ نوسانات روزانه را نشان می‌دهد. این رفتار غیر اختلالی(پرشها)، درونزا بوده و حتی در غیاب اخبار کلان مرتبط با دارایی مورد مطالعه نیز می‌تواند شکل بگیرد لذا ادعا می‌شود بازارهای مالی رفتار غیرتعادلی دارند و آرام نمی‌گیرند بدین معنی که حتی در غیاب اخبار اقتصادی و صرفاً در سایه شکل‌گیری روایات اقتصادی[2]، ترس و طمع[3] معامله‌گران و تقلید توده‌وار[4] عوامل از یکدیگر، بازار دچار هیجانات غیرمنطقی[5] می‌شود و این هیجانات بخاطر وجود مکانسیم فیدبک مثبت در رفتار عوامل، تقویت شده و پر شهای درونزا ایجاد می‌کنند و اصطلاحاً بیان می‌شود که "بازار خودش اخبار خودش را می‌سازد[6]". فارمر[7](۲۰۲۴)، وقوع بحران مالی ۲۰۰۸ را نمونه بارز چنین دیدگاهی می‌داند بطوریکه در آن

[1] perturbative
[2] Narrtives
[3] Fear&Greed
[4] Herding
[5] Irrational Exurbance
[6] Market makes its own news
[7] Farmer

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

دوران در کمال ناباوری و در شرایطی که شوک منفی خارجی(با دامنه توجیه کننده سقوط بازار) گزارش نشده بود شاهد ریزش سنگین قیمت دارائیها بودیم.

نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد که معادله دیفرانسیل تصادفی استخراج شده می‌تواند رفتار پخش-پرش فرآیند قیمت را در بازه کوتاه مدت مذکور به خوبی تولید کند و لذا توانایی مدل ارائه شده در پیش بینی خارج از نمونه نیز قابل قبول می‌باشد چرا که داده‌های مورد استفاده برای استخراج دینامیک فرآیند تا تاریخ ۲ فوریه ۲۰۲۴ بوده است در حالیکه پیش بینی برای زمان بعد از این تاریخ انجام شده است.

۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق بجای تصریح یک مدل خاص برای تولید پرشهای درونزا، ما فرم عمومی یک معادله دیفرانسیل تصادفی را برای فرآیند مورد مطالعه در نظر گرفتیم و از این نظر ادعا می‌کنیم که روش ما یک روش غیرپارامتری می‌باشد چرا که فرم خاصی برای پارامترهای رانش، پخش و پرش در نظر نگرفته‌ایم. مقایسه روش ناپارامتری کرامرز-مویال با روش های پارامتری مثل مدل های مارکوف پنهان، مدل های شاخه‌ای و مدل های استنباط وردشی، نشان می‌دهد که، این روش محاسبات سر راست تر و سبک تری نسبت به روشهای پارمتری مذکور دارد چرا که به عنوان مثال اگر بخواهیم در مدل مارکوف پنهان برای حالت پنهان و فرآیند ثانویه، توزیعهایی به ترتیب غیر از توزیع برنولی و نرمال در نظر بگیریم، نیاز به محاسبات سنگینی خواهد بود در حالیکه در روش ناپارامتری ما، تمام تخمین ها فقط بر اساس محاسبه ممان‌های شرطی می‌باشد.

استفاده از روش کرامرز- مویال برای استخراج ضرایب معادله لانژون تعمیم یافته از روی داده‌های تصنعی نشان می‌دهد که این روش با دقت خوبی قادر به استخراج ضرایب مدل می‌باشد. محققان حوزه فیزیک آماری که از مهم کاربران معادله لانژون تعمیم یافته هستند نشان می‌دهند که روش کرامرز- مویال در تخمین ضرایب معادله لانژون تعمیم یافته بهتر از روشهای حداکثر

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

درست نمایی، کرنل و هیستوگرام عمل می‌کند و ما نیز با توجه به برتری روش کرامرز-مویال و از آنجائیکه مدلهای پخش-پرش مورد استفاده در مالی حالت خاصی از معادله لانژون تعمیم یافته می باشند بر آن شدیم که برای اولین بار در حوزه مالی این روش را جهت استخراج ضرایب مدل پخش- پرش بکار ببریم. نتیجه ا ستفاده از این روش داده-محور در کاربرد عملی ارائه شده نشان می‌دهد که مشابه مدل مرتون، در اینجا نیز ضرایب رانش و پخش تابعی خطی از متغیر حالت سیستم می‌با شند با این تفاوت که در مدل مرتون این ضرایب به صورت پیش فرض تابع خطی از متغیر حالت در نظر گرفته شده بودند ولی در اینجا ما به روش غیرپارامتری آنها را استخراج کرده‌ایم.

از نظر کاربردی، پس از استخراج ضریب اول کرامرز-مویال، تابع پتانسیل که محدود کننده رفتار فرآیند و تعیین کننده نقاط تعادل سیستم می‌با شد نیز در د سترس خواهد بود چرا که ضریب اول کرامرز-مویال برابر منفی گرادیان تابع پتانسیل می‌با شد. همچنین با ا ستفاده از نتایج این تحقیق و پس از بازسازی و اجرای فرآیند به تعداد زیاد می‌توان مقدار ارزش در معرض خطر را محاسبه نمود. یک کاربرد مهم دیگر از دینامیک ا ستخراج شده، محا سبه توزیع احتمال اولین زمان خروج می باشد. با توجه به اینکه در صورت وجود پرش در فرآیند تصادفی، در حالت کلی جواب تحلیلی برای توزیع مذکور وجود ندارد ما با شبیه سازی دینامیک استخراج شده این توزیع را بدست آورده‌ایم. با در دست داشتن دینامیک یک فرآیند، خیلی از سوالات دیگر که ما در این تحقیق به آن نپرداختیم قابل برر سی ا ست از جمله متو سط زمان حضور متغیر حالت سیستم حول یک تعادل خاص، محاسبه زمان بهینه خروج از بازار و...

مقاله را با بیان این نکته به پایان می‌بریم که تعمیم معادله لانژون یک بعدی به حالت دوبعدی و استفاده از آن در حوزه فیزیک انجام شده است و لذا به عنوان یک کاربرد از معادله لانژون دوبعدی در حوزه مالی می‌توان به استخراج مدل هستون[1] اشاره کرد چرا که مدل هستون حالت خاصی از معادله لانژون دو بعدی می‌باشد.

[1] Heston model

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

References

Abdolmaleki, H., Mohammadi, SH., Kamali, S., & Vaziri, R. (2013). Surveying the Existence of Price Bubble in Tehran Stock Exchange(by using the LPPL Model). *Financial Engineering and Securities(Portfolio Management*), 4(14), 0-0. SID. https://sid.ir/paper/390725 (In Persian)

Anvari, M., Tabar, M. R. R., Peinke, J., & Lehnertz, K. (2016). Disentangling the stochastic behavior of complex time series. *Scientific Reports*, *6*(1), 35435 .

Arani, B. M., Carpenter, S. R., Lahti, L., Van Nes, E. H., & Scheffer, M. (2021). Exit time as a measure of ecological resilience. *Science*, *372*(6547), eaay4895.

Barro, R. J. (2009). Rare disasters, asset prices, and welfare costs. *American economic review* .۲۶۴-۲۴۳ ,(۱)۹۹ ,

Brunnermeier, M., & Krishnamurthy, A. (2020). Corporate debt overhang and credit policy. *Brookings Papers on Economic Activity*, *2020*(2), 447-502

Brunnermeier, M. (2024). Presidential Address: Macrofinance and Resilience. *The Journal of Finance*.

Bouchaud, J.-P., Bonart, J., Donier, J.,&Gould, M. (2018). *Trades, quotes and prices:financial markets under the microscope*. Cambridge University Press.

Campbell, J. Y., & Cochrane, J. H. (1999). By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior. *Journal of political Economy*, *107*(2), 205-251 .

Case, K. E., Shiller, R. J., & Thompson, A. (2014). What have they been thinking? Homebuyer behavior in hot and cold markets—A 2014 update .

Cochrane, J. H. (2017). Macro-finance. *Review of Finance*, *21*(3), 945-985 .

Cover, T. M. (1999). *Elements of information theory*. John Wiley & Sons .

Cutler, D. M., Poterba, J. M., & Summers, L. H. (1988). What moves stock prices? In: National Bureau of Economic Research Cambridge ,Mass., USA.

Farmer, J. D. (2024). Making Sense of Chaos: A Better Economics for a Better World. Allen Lane .

Farmer, R. E. (2010). *How the economy works: confidence, crashes and self-fulfilling prophecies*. Oxford University Press .

Fosset, A., Bouchaud, J-.P., & Benzaquen, M. (2020). Endogenous liquidity crises. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, *2020*(6), 063401 .

Gabaix, X., & Koijen, R. S. (2021). *In search of the origins of financial fluctuations: The inelastic markets hypothesis* .

Gardiner, C. W. (1985). *Handbook of stochastic methods* (Vol. 3). springer Berlin .

Gennaioli, N., & Shleifer, A. (2018). *A crisis of beliefs: Investor psychology and financial fragility*. Princeton University Press .

Gopikrishnan, P., Plerou, V., Amaral ,L. A. N., Meyer, M., & Stanley, H. E. (1999). Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, *60*(5), 5305 .

Greenwood, R., Hanson, S. G., Shleifer, A., & Sørensen, J. A. (2022). Predictable financial crises. *The Journal of Finance*, *77*(2), 863-921 .

Halperin, I. (2022). Non-equilibrium skewness, market crises, and option pricing: Non-linear Langevin model of markets with supersymmetry. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *594*, 127065.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

Hansen, L. P., & Sargent, T. J. (2019). *Macroeconomic Uncertainty Prices* .

Hansen, L. P., & Sargent, T. J. (2022). Structured ambiguity and model misspecification. *Journal of Economic Theory*, *199*, 105165 .

He, Z., & Krishnamurthy, A. (2018). Intermediary asset pricing and the financial crisis. *Annual Review of Financial Economics*, *10*, 173-197 .

Izhakian, Y., & Benninga, S. (2011). The uncertainty premium in an ambiguous economy. *The Quarterly Journal of Finance*, *1*(02), 323-354 .

Joulin, A., Lefevre, A., Grunberg, D., & Bouchaud, J.-P. (2008). Stock price jumps: news and volume play a minor role. *arXiv preprint arXiv:0803.1769* .

Lehnertz, K., Zabawa, L., & Tabar, M. R. R. (2018). Characterizing abrupt transitions in stochastic dynamics. *New Journal of Physics*, *20*(11), 113043 .

Lin, J. (1991). Divergence measures based on the Shannon entropy. *IEEE transactions on Information Theory*, *37*(1), 145-151 .

Malevergne*, Y., Pisarenko, V., & Sornette, D. (2005). Empirical distributions of stock returns: between the stretched exponential and the power law? *Quantitative Finance*, *5*(4), 379-401 .

Manning, C., & Schutze, H. (1999). *Foundations of statistical natural language processing*. MIT press .

Marcaccioli, R., Bouchaud, J.-P., & Benzaquen, M. (2022). Exogenous and endogenous price jumps belong to different dynamical classes. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, *2022*(2), 023403 .

Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, *3*(1-2), 125-144 .

Nadaraya, E. A. (1964). On estimating regression. *Theory of Probability & Its Applications*, *9*(1), 141-142 .

Namaki, A., & Haghgoo, M. (2021). Detection of Bubbles in Tehran Stock Exchange Using Log-Periodic Power-Low Singularity Model. *Iranian Journal of Finance*, *5*(4), 52-63

Nikakhtar, F., Parkavousi, L., Sahimi, M., Tabar, M. R. R., Feudel, U., & Lehnertz, K. (2023). Data-driven reconstruction of stochastic dynamical equations based on statistical moments. *New Journal of Physics*, *25*(8), 083025 .

Pawula, R. (1967). Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker-Planck equation. *Physical review*, *162*(1), 186 .

Platen, E., & Bruti-Liberati, N. (2010). *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance* (Vol. 64). Springer Science & Business Media .

Rinn, P., Lind, P. G., Wächter, M., & Peinke, J. (2016). The Langevin approach: An R package for modeling Markov processes. *arXiv preprint arXiv:1603.02036*.

Risken, H., & Risken, H. (1996). *Fokker-planck equation*. Springer .

Shiller, R. J. (1981). Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends ?

Shiller, R. J. (2003). From efficient markets theory to behavioral finance. *Journal of economic perspectives*, *17*(1), 83-104 .

Shiller, R. J. (2014). Speculative asset prices. *American economic review*, *104*(6), 1486-1517 .

Shiller, R. J. (2017). Narrative economics. *American economic review*, *107*(4), 967-1004 .

Tabar, R. (2019). *Analysis and data-based reconstruction of complex nonlinear dynamical systems* (Vol. 730). Springer .

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]

Watson, G. S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 359-372 .

Wehrli, A., & Sornette, D. (2022). The excess volatility puzzle explained by financial noise amplification from endogenous feedbacks. *Scientific Reports*, *12*(1), 18895 .

Xu, Y., Li, H., Wang, H., Jia, W., Yue, X., & Kurths, J. (2017). The estimates of the mean first exit time of a bistable system excited by Poisson white noise. *Journal of Applied Mechanics*, *84*(9), 091004.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286454.1402.14.53.6.5]