ظرفیت باربری پی نواری مستقر در شیب به روش مرز بالای تحلیل حدی اجزاء محدود

محمدمهدی امین‌پور*، محمد ملکی؛
دانشگاه بوعلی سینا، دانشکدهٔ مهندسی، گروه مهندسی عمران

تاریخ: دریافت ۹۷/۰۷/۲۰ پذیرش ۹۷/۱۰/۰۵

چکیده

در این مقاله، ظرفیت باربری پی نواری مستقر در شیب‌هایی با خاک دانه‌ای، به‌روش مرز بالای تحلیل حدی اجزاء محدود بررسی شده است. این روش تحلیلی، امکان استفاده از مزیت‌های هر دو روش تحلیل حدی و اجزاء محدود را فراهم می‌آورد. تأثیر شیب‌های مختلف بالادست و پایین‌دست، عمق‌های مختلف گود بالادست و پایین‌دست، زوایای مختلف اصطکاک خاک و همچنین تأثیر انواع مش‌بندی بر ظرفیت باربری ارزیابی شده است. ظرفیت باربری پی با در نظرگیری لغزش بین دو المان و تحت بهینه‌سازی خطی حاصل شده است. مطابق نتایج حاصل، تغییرات پایین‌دست پی تأثیر به‌سزایی و تغییرات بالادست پی تأثیر اندکی بر ظرفیت باربری دارد. نتایج روش ارائه شده در این تحقیق، حد بالایی از روش‌های تعادل حدی و اجزاء محدود جابه‌جایی است. با این وجود در تحقیق حاضر، روش تحلیل حدی قطعات صلب حد بالایی از روش ارائه شده است. روش خطوط مشخصه، با توجه به زاویه شیب در برخی موارد ظرفیت باربری بیش‌تری و در برخی موارد مقدار کم‌تری را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ظرفیت باربری، پی مستقر در شیب، روش تحلیل حدی اجزاء محدود، تغییرات بالادست و پایین‌دست شیب.

*نویسنده مسئول Aminpour.geoeng@gmail.com

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

مقدمه

تعیین تأثیر شیب زمین بر ظرفیت باربری پی در مناطق شهری از جمله مسائل مهم ژئوتکنیک است که از دیرباز مورد توجه محققان بوده است. به‌طورکلی روش‌های تحلیلی مسئله ظرفیت باربری پی در شیب را می‌توان به سه دسته روش تعادل حدی، روش خطوط مشخصه و روش تحلیل حدی تقسیم‌بندی کرد. در روش تعادل حدی با در نظر گرفتن یک مکانیسم گسیختگی فرضی، بار حدی به‌کمک حل معادلات تعادل در تودهٔ خاک گسیخته شده به‌دست می‌آید [۱]. در این راستا محققان مکانیسم‌های گسیختگی مختلفی، برای پی‌های سطحی در مجاورت و یا مستقر در شیب در نظر گرفته‌اند [۲]، [۳]، [٤]، [۵]. در روش خطوط مشخصه، از ترکیب معادلات تعادل با معادله سطح خمیری، دستگاهی از معادلات دیفرانسیل به‌دست می‌آید. حل این معادلات با در نظر گرفتن شرایط مرزی، منجر به تعیین میدان تنش در توده خاک و در نهایت تعیین بار حدی می‌شود. به این روش تحقیقات مختلفی در زمینه ظرفیت باربری پی‌های سطحی در مجاورت و یا مستقر در شیب صورت گرفته است [٦]، [۷]، [۸]. در روش تحلیل حدی، با در نظر گرفتن یک مکانیسم گسیختگی فرضی و حل معادله کار مجازی روی میدان سینماتیکی، مقدار ظرفیت باربری پی‌های سطحی در مجاورت و یا مستقر در شیب استخراج می‌شود [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]. هم‌چنین در صورت حل معادلات تعادل و تسلیم، مقدار مرز پایین گسیختگی روی میدان‌های تنش به‌دست می‌آید [١٤]، [۱۵]، [١٦]. در تعیین ظرفیت باربری باید علاوه بر گسیختگی خاک زیر پی، گسیختگی کلی شیروانی و پایداری آن نیز در نظر گرفته شود. در این راستا تحقیقات زیادی به‌روش تحلیل حدی صورت گرفته است [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]. امین‌پور و قنبری [۲۱] به‌روش مرز بالای تحلیل حدی، گسیختگی و جابه‌جایی لرزه‌ای دیوارهای حائل صلب در مجاورت سربار را بررسی کرده‌اند. امین پور و همکاران [۲۲]، [۲۳] به‌روش تحلیل حدی، گسیختگی و جابه‌جایی لرزه‌ای شیروانی‌های خاکی و دیوارهای خاک مسلح در مجاورت ساختمان را ارزیابی کردند.

در سال‌های اخیر با توجه به محدودیت‌های روش‌های حدی، تحقیقاتی در استفاده از روش اجزاء محدود در غالب حالت حدی، در مصالح ژئوتکنیکی انجام شده است. در این

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

زمینه برخی از محققان به بررسی ظرفیت باربری پی‌های سطحی [۲٤]، [۲۵]، [۲٦]، [۲۷]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۱] و برخی به بررسی پایداری شیروانی‌ها پرداخته‌اند [۳۲]، [۳۳]، [۳٤]، [۳۵]، [۳٦]. شیایو[1] و همکاران [۳۳] پایداری شیب زهکشی نشده رسی در مجاورت سربار را بررسی کردند. راج[2] و همکاران [۳٦] ظرفیت باربری لرزه‌ای پی نواری روی شیب را در مرز بالا و پایین تحلیل حدی بررسی کردند.

در این تحقیق، به‌روش مرز بالای تئوری تحلیل حدی اجزاء محدود، به بررسی ظرفیت باربری پی نواری مستقر در شیب پرداخته شده است. برای یافتن حالت بحرانی گسیختگی، انرژی مستهلک شده داخلی تحت بهینه‌سازی خطی به‌روش نقاط داخلی قرار گرفته است. از مزایای این روش سرعت حل بالای آن نسبت به دیگر روش‌های بهینه‌یابی تحلیلی است [۳۷]. تأثیر مش‌بندی‌های مختلف، زوایا و عمق‌های مختلف بالادست و پایین‌دست شیب بررسی شده است. در نهایت نتایج حاصل با روش‌های تعادل حدی، تحلیل حدی قطعات صلب، خطوط مشخصه و روش اجزاء محدود جابه‌جایی مقایسه شده است.

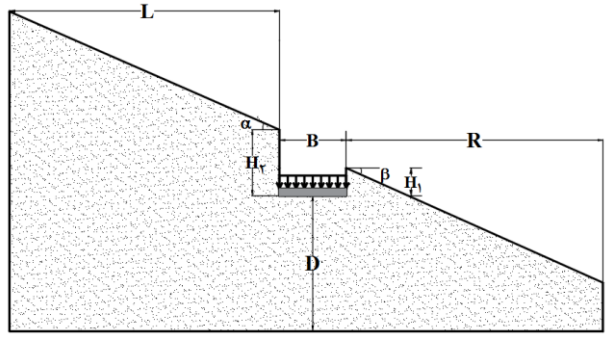
تعریف مسئله

یک پی نواری با عرض B، دارای عمق مدفون پایین‌دست H_1 و عمق مدفون بالادست H_2 مستقر در شیب است. زاویهٔ شیب بالادست α و زاویهٔ شیب پایین‌دست β در نظر گرفته شده است (شکل ۱). مصالح خاکی به‌صورت دانه‌ای و منطبق بر معیار تسلیم مور-کولمب با زاویهٔ اصطکاک داخلی ϕ، زاویهٔ اتساع φ و وزن مخصوص γ است. پی به‌صورت صلب در نظر گرفته شده است. بار حدی وارده بر پی (q) حاصل از نتیجه تحلیل حدی اجزاء محدود به‌دست می‌آید.

محدودهٔ مش‌بندی باید شامل توده گسیختگی خاک باشد. برای این منظور از پایین پی، محدوده $D=5B$ و از طرفین پی، محدوده $L=R=10B$ بررسی شده است. دیگر محققان از محدودهٔ مش‌بندی مشابهی برای گسیختگی خاک زیر پی استفاده کرده‌اند [۲٤]، [۲٦]، [۳۳].

1. Shiau
2. Raj

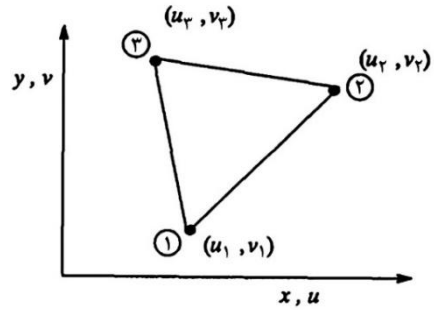
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]



شکل ۱. هندسه و پارامترهای مسئله

فرمولاسیون مرز بالای تحلیل حدی اجزاء محدود

با مش‌بندی مسئله و اعمال روابط تحلیل حدی به المان‌ها و گره‌های محیط، علاوه بر افزایش دقت مسئله، دیگر نیازی به در نظرگیری پیش‌فرض مکانیسم گسیختگی، مطابق روش کلاسیک تحلیل حدی، نیست [۳۲]. از طرف دیگر مطابق روش اجزاء محدود کلاسیک نیازی به تشکیل ماتریس سختی و محاسبات قبل از گسیختگی نیست. شکل ۲ نشان‌دهندهٔ یک المان مثلثی سه گره‌ای است. براساس اصول روش اجزاء محدود، با داشتن سرعت در گره‌های المان، سرعت در هر نقطه از المان بر اساس توابع شکل به‌دست می‌آید.



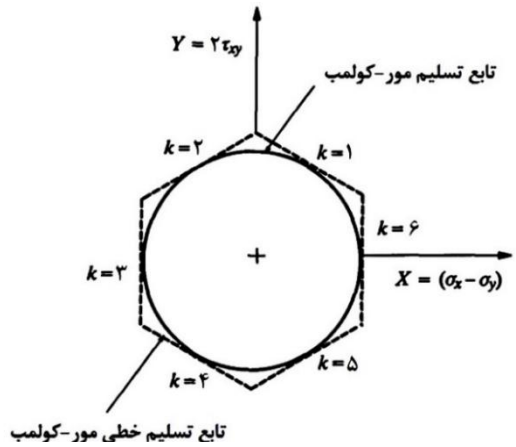
شکل ۲. المان سه گره‌ای استفاده شده در روش پیشنهادی

$$u=\sum_{i=1}^{3} N_i\, u_i; \quad v=\sum_{i=1}^{3} N_i\, v_i \tag{1}$$

توابع شکل است. برای N_i سرعت در جهت قائم و v سرعت در جهت افق، u در رابطهٔ (۱)، استفاده از بهینه‌سازی خطی در مرز بالای تحلیل حدی، باید تابع گسیختگی مور-کولمب با

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

مدلی تقریب زده شود که در آن معادلات انرژی مستهلک شده داخلی و قیود سینماتیکی به‌صورت خطی و مستقل باشند [۲٤]، [۲۵]، [۲٦]. برای این منظور تابع مور-کولمب در فضای به‌صورت یک دایره (شکل ۳) مدل می‌گردد. در نهایت این دایره با یک چندضلعی X-Y تخمین زده می‌شود. رابطهٔ (۳) تقریب رابطهٔ مور-کولمب، استفاده شده در بهینه‌سازی خطی را نشان می‌دهد [۲٤]، [۲۵]، [۲٦].



شکل ۳. تخمین معیار مورکلمب به‌صورت یک شش‌ضلعی

$$F=(\sigma_x-\sigma_y)^{۲}+(۲\tau_{xy})^{۲}-۲c\cos\phi-(\sigma_x+\sigma_y)\sin\phi=۰$$

$$\begin{cases} X=(\sigma_x-\sigma_x); \quad Y=۲\tau_{xy}; \quad R=۲c\cos\phi-(\sigma_x+\sigma_y)\sin\phi \\ X^{۲}+Y^{۲}=R^{۲} \end{cases} \tag{۲}$$

$$F_k=A_k\,\sigma_x+B_k\,\sigma_y+C_k\,\tau_{xy}-۲c\cos\phi=۰$$

$$\begin{cases} A_k=\cos\dfrac{۲k\pi}{p}+\sin\phi \\ B_k=\sin\phi-\cos\dfrac{۲k\pi}{p} \\ C_k=۲\sin\dfrac{۲k\pi}{p}; \quad k=۱,۲,۳,\ldots,p \end{cases} \tag{۳}$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

در رابطهٔ (۳)، سطح گسیختگی مور-کولمب به‌صوت تخمینی از تعدادی صفحه است. هر یک از این صفحات دارای ضریب پلاستیک مختص به‌خود است، به‌طوری‌که نرخ کرنش پلاستیک از مجموع تغییرات هریک از سطوح به‌دست خواهد آمد [۲٤]، [۲۵]، [۲٦]. با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی میزان دقت رابطهٔ (۳) بالاتر می‌رود. استفاده از دوازده ضلع می‌تواند دقت کافی را برای مسائل ژئوتکنیکی ایجاد کند [۲٦].

قانون جریان

در مصالح با زاویهٔ اصطکاک بالا، استفاده از قانون جریان متحد[1]، مقدار اتساع را زیادتر از واقعیت نشان خواهد داد. در این حالت، استفاده از پارامترهای برشی اصلاح شده خاک مناسب است [۳۲]. پارامتر برشی اصلاح شده برای خاک غیرچسبنده به‌صورت رابطهٔ (٤) است [۳۲]. در این رابطهٔ φ زاویهٔ اتساع خاک است.

$$\tan\varphi^* = \beta\tan\varphi; \quad \beta = \frac{\cos\psi\cos\varphi}{1-\sin\psi\,\sin\varphi} \tag{٤}$$

براساس تقریب تابع مور-کولمب و استفاده از توابع شکل، نرخ کرنش‌های پلاستیک به‌صورت روابط (۵) است.

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial \sigma_x} = \sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k A_k = \sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial N_i}{\partial x}u_i \\ \dot{\varepsilon}_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \lambda\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_y} = \sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial \sigma_y} = \sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k B_k = \sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial N_i}{\partial y}v_i \\ \dot{\gamma}_y = (\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}) = \lambda\dfrac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} = \sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k\dfrac{\partial F_k}{\partial \tau_{xy}} = \sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k C_k = \sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial N_i}{\partial x}v_i + \sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial N_i}{\partial y}u_i \end{cases} \tag{۵}$$

این معادلات بر پایه میدان سرعت قابل‌قبول سینماتیکی است و شامل شش سرعت گره‌ای مجهول و تعداد مشخصی ضرایب پلاستیک مجهول برای یک المان است. صورت ماتریسی معادلات نرخ کرنش پلاستیک، به‌صورت روابط (٦) است [۲٦]. منظور از A مساحت المان و x_i و y_i به‌ترتیب مختصات افقی و قائم گره i است.

$$[a_{11}]\{x_1\}+[a_{12}]\{x_2\}=0 \tag{٦}$$

1. Associative flow rule

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

$$\{x_1\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}$$
$$\{x_2\}^T = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$$
$$[a_{11}] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$
$$x_{ij} = x_i - x_j$$
$$y_{ij} = y_i - y_j$$
$$[a_{12}] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_k & \ldots & A_p \\ B_1 & B_2 & B_3 & \ldots & B_k & \ldots & B_p \\ C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_k & \ldots & C_p \end{bmatrix}$$

انرژی‌های مستهلک شده داخلی در المان‌ها

در حالت حدی، میدان‌های سینماتیکی ایجاد شده در محیط المان باعث ایجاد کرنش و تنش‌های حدی در محیط خاک خواهند شد. در این صورت، مقدار نرخ انرژی مستهلک شده داخلی برابر حاصل‌ضرب تنش در جزء کرنش صورت گرفته در یکایک المان‌ها خواهد بود. برای یک المان خاک غیرچسبنده، نرخ انرژی مستهلک شده داخلی برابر صفر خواهد شد.

$$W_{element}^{Internal} = \int_A \left(\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}\right) dA = \int_A \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sigma_x A_k + \sigma_y B_k + \tau_{xy} C_k\right) dA = 0$$
$$= \int_A \sum_{k=1}^{p} \lambda_k F\, dA = F\, A \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = \{d_2\}^T \{x_2\} \qquad (۷)$$
$$\{d_2\}^T = \{0\}; \quad \{x_2\}^T = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$$

انرژی‌های مستهلک شده داخلی در ناپیوستگی‌ها

تغییر شکل‌های پلاستیک و حرکت توده‌ای از خاک گسیخته شده، منجر به لغزش دو المان مجاور هم می‌شود. لغزش دو المان نسبت به یک‌دیگر باعث ایجاد اتلاف انرژی خواهد شد. برای بررسی لغزش دو المان مجاور، علاوه بر سرعت نهایی باید چندین سرعت نسبی برای هر گره تعریف شود. مفهوم لغزش دو المان مجاور نسبت به یک‌دیگر در شکل ٤ نشان داده شده است [٢٦]. منظور از u_{ij}^{+} و u_{ij}^{-} سرعت‌های برشی در جهت ناپیوستگی در گره مشترک بین دو المان و تفاضل بین u_{ij}^{+} و u_{ij}^{-} نشان‌دهندهٔ اختلاف سرعت‌های برشی در جهت

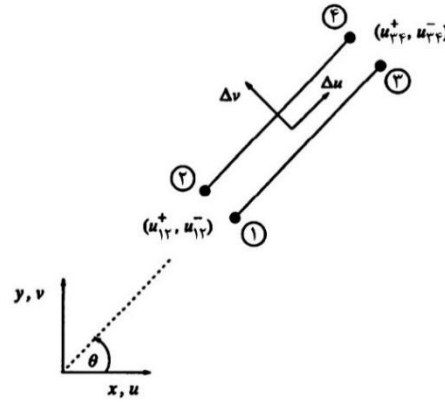
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

ناپیوستگی و در واقع برابر لغزش در گره مشترک دو المان مجاور است. منظور از θ زاویهٔ ناپیوستگی نسبت به افق است.

بدون در نظرگیری معیار گسیختگیی، نرخ کار داخلی مستهلک شده در هر ناپیوستگی به‌صورت رابطهٔ (۸) تعریف می‌شود [۲۷]. با در نظرگیری تغییرات خطی سرعت، برآیند سرعت‌های برشی در طول ناپیوستگی l، از رابطهٔ (۹) به‌دست می‌آید [۲۶].

$$W_{discont}^{Internal} = \int_d \left(\tau\,\Delta u + \sigma\,\Delta v\right) dl \tag{۸}$$

$$\Delta u = \left(u_{۱۲}^{+} - u_{۱۲}^{-}\right) + \frac{۱}{l}\left(u_{۳۴}^{+} - u_{۳۴}^{-} - u_{۱۲}^{+} + u_{۱۲}^{-}\right) \tag{۹}$$



شکل ٤. لغزش برشی دو المان مجاور یک‌دیگر

با در نظرگیری رابطه بین مؤلفه‌های برشی و نرمال، نرخ کار مستهلک شده در مرز ناپیوستگی المان خاک غیرچسبنده، صفر خواهد شد.

$$W_{discont}^{Internal} = \int_d \left(\tau\,\Delta u + \sigma\,\Delta v\right) dl = \int_d \left(\tau - \sigma \tan\varphi^{*}\right) \Delta u\; dl = ۰$$

$$W_{discont}^{Internal} = \left\{d_۳\right\}^T \left\{x_۳\right\} \tag{۱۰}$$

$$\left\{d_۳\right\}^T = \left\{۰\right\};\quad \left\{x_۳\right\}^T = \left\{u_{۱۲}^{+}, u_{۱۲}^{-}, u_{۳۴}^{+}, u_{۳۴}^{-}\right\}$$

ارتباط بین سرعت‌ها در سطوح لغزشی

با اعمال قانون جریان در ناپیوستگی سینماتیکی، رابطهٔ (۱۱) بین سرعت‌های مماس بر راستای ناپیوستگی (شکل ٤) و سرعت‌های گره‌ای افقی و قائم حاکم است [۲۶]، [۲۷]. بر

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

این اساس معادلات ماتریسی (۱۲) بین سرعت‌های گره‌ای موجود در یک ناپیوستگی برقرار است.

$$(u_i - u_j)\sin\theta + (v_j - v_i)\cos\theta = (u_{ij}^{+} + u_{ij}^{-})\tan\phi^{*} \qquad (۱۱)$$

$$[a_{۲۱}]\{x_۱\} - [a_{۲۳}]\{x_۳\} = ۰ \qquad (۱۲)$$

$$\{x_۱\} = \{u_۱, v_۱, u_۲, v_۲, u_۳, v_۳, u_۴, v_۴\}^T$$

$$[a_{۲۱}] = \begin{bmatrix} -\mu & -\omega & \mu & \omega & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \omega & -\mu & -\omega & \mu & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -\mu & -\omega & \mu & \omega \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \omega & -\mu & -\omega & \mu \end{bmatrix}$$

$$\mu = \cos\theta; \quad \omega = \sin\theta$$

$$[a_{۲۳}] = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ \tan\phi^{*} & \tan\phi^{*} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & \tan\phi^{*} & \tan\phi^{*} \end{bmatrix}$$

$$\{x_۳\} = \{u_{۱۲}^{+}, u_{۱۲}^{-}, u_{۳۴}^{+}, u_{۳۴}^{-}\}^T$$

شرایط مرزی سینماتیکی

شرایط مرزی، شامل سرعت‌های سینماتیکی صفر بر مرزهای محدوده مش‌بندی و سرعت قائم منفی یک و سرعت افقی صفر در نقاط زیر پی صلب است (شکل ۵). قید شرایط مرزی برای یک ناپیوستگی به‌صورت رابطهٔ (۱۳) تعریف می‌شود. در این رابطه $[a_{۳۱}]$ ماتریس واحد، $\{b_۳\}$ بردار مقادیر مشخص شده میدان سینماتیکی و $\{x_۱\}$ میدان سینماتیکی گره مرزی است.

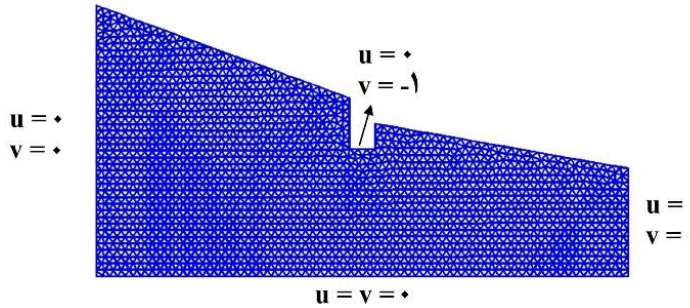
$$[a_{۳۱}]\{x_۱\} = \{b_۳\} \qquad (۱۳)$$

$$[a_{۳۱}] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}; \qquad \{x_۱\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix};$$

$$\{b_۳\} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix} \& \begin{Bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{Bmatrix}$$

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]



شکل ۵. شرایط مرزی سینماتیکی

میدان‌های سینماتیکی و ظرفیت باربری در الگوریتم خطی

براساس قانون کار مجازی، مقدار نرخ انرژی مستهلک شده داخلی با مقدار نرخ کار خارجی برابر است. از این‌رو، به‌جای حداقل‌سازی معادله کار مجازی می‌توان انرژی مستهلک شده داخلی را بهینه کرد [۲۶]. معادلات رابطهٔ (۱۴) کاملاً به‌صورت خطی و مستقل است. این نوع از بهینه‌سازی تحت عنوان بهینه‌سازی خطی در مباحث ریاضی مطرح است و براساس روش نقاط داخلی[1] قابل حل است [۳۷]. از مزایای این روش، سرعت حل بالای آن نسبت به دیگر روش‌های بهینه‌یابی تحلیلی است. با تفکیک ماتریس مجهولات و انجام فرآیند بهینه‌سازی، میدان‌های سینماتیکی مجاز، ضرایب پلاستیک و سرعت‌های برشی وارده بر گره‌ها تعیین می‌شود.

$$\text{minimize}\{D_2\}^T\{X_2\}+\{D_3\}^T\{X_3\} \tag{۱۴}$$

$$subject\ to\begin{cases}[A_{11}]\{X_1\}+[A_{12}]\{X_2\}=\{B_1\}=\{0\}\\ [A_{21}]\{X_1\}-[A_{23}]\{X_3\}=\{B_2\}=\{0\}\\ [A_{31}]\{X_1\}=\{B_3\}=\{0\}\\ \{X_2\}\geq\{0\}\end{cases}$$

$$\{X_1\}^T=\{u_1,v_1,u_2,v_2,\ldots,u_n,v_n\}$$

$$\{X_2\}^T=\{\lambda_1^1,\ldots,\lambda_p^1,\lambda_1^2,\ldots,\lambda_p^2,\ldots,\lambda_1^E,\ldots,\lambda_p^E\}$$

$$\{X_3\}^T=\{u_{12}^+,u_{12}^-,\ldots,u_{(n-1)\times n}^+,u_{(n-1)\times n}^-\}$$

1. Interior points method

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

در روابط مذکور $\{X_1\}$ بردار جمع‌بندی کل سرعت‌های گره‌ای، $\{X_2\}$ بردار ضرایب پلاستیک جمع‌بندی شده و $\{X_3\}$ بردار جمع‌بندی سرعت‌های ناپیوستگی است. ماتریس‌های $[A_{11}]$، $[A_{12}]$، $[A_{21}]$، $[A_{23}]$، $[A_{31}]$، $[D_2]$، $[D_3]$ و $[B_3]$ به‌ترتیب ماتریس‌های جمع‌بندی شده $[a_{11}]$، $[a_{12}]$، $[a_{21}]$، $[a_{23}]$، $[a_{31}]$، $[d_2]$، $[d_3]$ و $[b_3]$ هستند. در این معادلات n تعداد گره‌ها، E تعداد المان‌های استفاده شده و p تعداد صفحات استفاده شده در تخمین رابطهٔ مور-کولمب است.

با پیدا کردن میدان‌های سینماتیکی مجهول و استفاده از قانون کار مجازی، مقدار ظرفیت باربری از رابطهٔ (۱۵) به‌دست خواهد آمد. این رابطهٔ نشان‌دهندهٔ نرخ کار خارجی ناشی از نیروهای وزنی و نیروهای سطحی است [۲۷]. در این رابطهٔ $\{t^s\}$ بردار شامل مؤلفه‌های بارگذاری سطحی، $\{b^e\}$ بردار نیروهای وزنی وارده بر گره‌ها، N ماتریس توابع شکل المان مثلثی و N^s ماتریس توابع شکل خطی برای وجه المان است.

$$\{t^s\}^T \times \left[\int_{l_t} N^{sT} N^s dl\right] \times \{u\} + \{b^e\}^T \times \left[\int_A N^T N dA\right] \times \{u\} = 0 \qquad (۱۵)$$

کدنویسی حجیمی در محیط برنامه متلب برای حل فرمولاسیون اشاره شده، مش‌بندی محدوده مسئله، ارتباط بین گره‌ها و المان‌ها، تشکیل ماتریس‌های جمع‌بندی و انتگرال توابع شکل صورت گرفته است. هم‌چنین رابطهٔ (۱۴) در برنامه متلب تحت تابع لینپروگ[1] روی میدان‌های سینماتیکی و ضرایب پلاستیک بهینه‌یابی شده است.

مش‌بندی و نتایج حاصل

در این پژوهش، از دو نوع مش‌بندی یکنواخت و غیریکنواخت استفاده شده است. انواع مش‌بندی‌ها شامل مش‌هایی با المان‌های یکنواخت در سه اندازه کوچک، متوسط و بزرگ و مش‌بندی‌های غیریکنواخت در چهار حالت بسیار کوچک، کوچک، متوسط و بزرگ است. محققان از المان‌هایی برابر نصف عرض پی برای مش‌بندی بزرگ و از المان‌هایی برابر یک چهارم عرض پی برای مش‌بندی کوچک استفاده کرده‌اند [۲۴]، [۲۵]، [۲۶].

1. Linprog

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

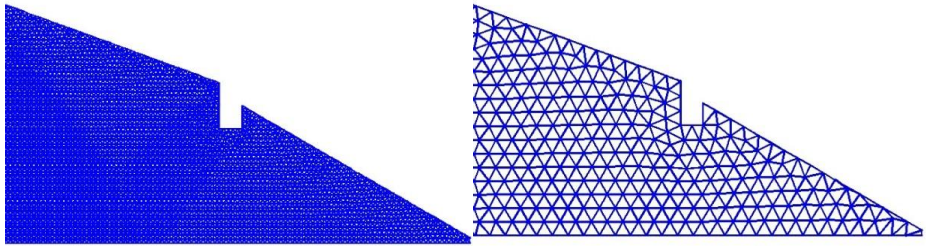
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

در این تحقیق، از مش‌بندی بزرگ با میانگین اندازه المان ۷۰ سانتی‌متر و از مش‌بندی‌های متوسط و کوچک به‌ترتیب با میانگین اندازه المان‌های ٤۰ و ۲۰ سانتی‌متری استفاده شده است. در شکل ٦ مش‌بندی بزرگ و کوچک برای شیب بالادست ۲۰ و پایین‌دست ۳۰ درجه نشان داده شده است. در شکل ٦ (الف)، میانگین اندازه المان‌ها برابر ۷۰ سانتی‌متر است. برای ایجاد مش‌بندی یکنواخت، از المان‌های مشابه استفاده شده است. در برخی موارد مانند المان‌های مرزی، از اندازه‌های متفاوتی استفاده شده است.

از خاک دانه‌ای با زاویهٔ اصطکاک داخلی اصلاح شده ۳۷ درجه و وزن مخصوص ۱۸ کیلونیوتن بر مترمکعب استفاده شده است. به‌عنوان مثال، با توجه به رابطهٔ (٤)، این خاک می‌تواند دارای زاویهٔ اصطکاک داخلی ٤۳ درجه و زاویهٔ اتساع ۹ درجه، معادل زاویهٔ اصطکاک داخلی اصلاح شده ۳۷ درجه باشد. در ابتدا هندسه مسئله در سه حالت تغییرات زاویهٔ شیب پایین‌دست بررسی شده است (جدول ۱). در جدول ۱، منظور از پارامترهای B، H_1، H_2، α و β به‌ترتیب عرض پی نواری، عمق مدفون پایین‌دست، عمق مدفون بالادست، زاویهٔ شیب پایین‌دست و زاویه شیب بالادست است. هم‌چنین مقادیر L، R و D ابعاد مش‌بندی به‌ترتیب از چپ، راست و پایین پی است (شکل ۱).

جدول ۱. مشخصات هندسی مسئله

B (m)	H_1 (m)	H_2 (m)	α°	β°	L (m)	R (m)	D (m)
				۱۰			
۱	۱	۲	۲۰	۲۰	۱۰	۱۰	۵
				۳۰			



ب الف

شکل ٦. مش‌بندی یکنواخت الف) بزرگ و ب) کوچک در شیب پایین‌دست ۳۰ درجه

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

در جدول ۲ تعداد المان‌ها (E) و گره‌های (n) استفاده شده در مش‌بندی‌های مختلف یکنواخت نشان داده شده است. چنان‌که در جدول ۲ دیده می‌شود با کاهش اندازهٔ المان‌ها (h)، تعداد المان‌ها و گره‌ها بسیار زیاد می‌شود. در این حالت ابعاد ماتریس‌های محاسباتی به‌شدت افزایش پیدا کرده و حل مسئله زمان‌بر خواهد شد. با کوچک‌تر کردن المان‌ها به انداز ۱۰ سانتی‌متر، ابعاد ماتریس نهایی بهینه‌سازی به قدری زیاد خواهد شد، که برنامه متلب دچار خطا می‌شود. در جدول ۳ به مقایسه ظرفیت باربری پی نواری روی شیب، در مش‌بندی‌های مختلف یکنواخت پرداخته شده است.

جدول ۲. تعداد المان‌ها و گره‌ها در مش‌بندی‌های مختلف یکنواخت

β	مش‌بندی یکنواخت (h =۰/۲ m)		مش‌بندی یکنواخت (h =۰/٤ m)		مش‌بندی یکنواخت (h =۰/۷ m)	
	n	E	n	E	n	E
۱۰°	٤۲٥۲	۸۲۰۳	۱۰۸۸	۲۰۲۱	۳٦۸	٦٤٦
۲۰°	۳۹۷۹	۷٦٦٦	۱۰۱۹	۱۸۸۸	۳٤٤	٦۰۱
۳۰°	۳٦٥۲	۷۰۳٤	۹٤۱	۱۷۳٦	۳۱۸	٥٥۲

جدول ۳. مقایسه ظرفیت باربری در مش‌بندی‌های مختلف یکنواخت (kN/m^2)

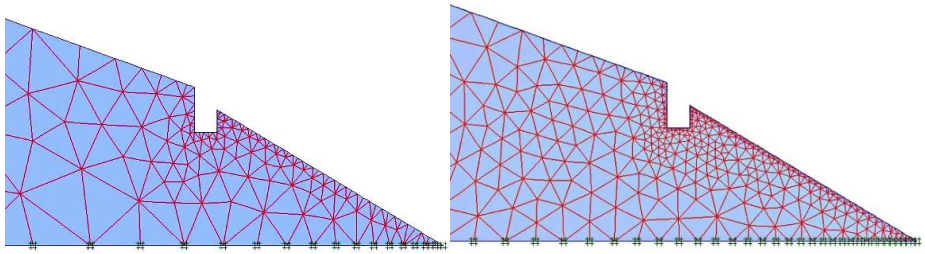
β	مش‌بندی یکنواخت (h =۰/۲ m)	مش‌بندی یکنواخت (h =۰/٤ m)	مش‌بندی یکنواخت (h =۰/۷ m)
۱۰°	۱۳۹۱/۰۷	۱٤۱۲/۳۰	۱٤۳۰/۲۱
۲۰°	۹۱٤/٤۱	۹۳۰/۹٥	۹٤٦/٥٤
۳۰°	٥۹۹/۱۳	٦۱۹/۲۰	٦٤۲/٦۹

برای انتخاب مش‌بندی مناسب، باید نتایج ظرفیت باربری در مش‌بندی‌های مختلف به هم‌گرایی برسند. بر این اساس از مش‌بندی‌های مختلف غیریکنواخت استفاده شده است. در شکل ۷، مش‌بندی‌های غیریکنواخت کوچک و بزرگ برای شیب پایین‌دست ۳۰ درجه و بالادست ۲۰ درجه نشان داده شده است. در این حالت نقاط زیر پی و اطراف شیب، دارای مش‌بندی ریزتر و در سایر نقاط ابعاد مش‌بندی بزرگ‌تر است.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

برای مش‌بندی غیریکنواخت شماره گره‌ها، المان‌ها و مختصات گره‌ها از برنامه پلکسیس[1] اقتباس شده و با اعمال اصلاحاتی بر فرمولاسیون اعمال شده است. در برنامه پلکسیس، المان‌های زیر خط پی و المان‌های زیر خط شیب پایین‌دست، برای چندین مرحله ریزتر شده به‌طوری‌که در مش‌بندی کوچک، میانگین اندازه المان‌های زیر پی برابر ۵ سانتی‌متر است. اندازهٔ سایر المان‌ها به‌طور اتوماتیک با فاصله گرفتن از خط پی و خط شیب پایین‌دست بزرگ‌تر می‌شوند. اندازه بزرگ‌ترین المان در شکل ۷ الف برابر ۱/۵ متر است.



ب الف

شکل ۷. مش‌بندی غیریکنواخت الف) کوچک و ب) بزرگ در شیب پایین‌دست ۳۰ درجه

در مش‌بندی‌های متوسط و بزرگ غیریکنواخت شیب پایین‌دست ۳۰ و بالادست ۲۰ درجه، اندازهٔ المان‌های زیر پی به‌ترتیب برابر با ۱۲/۵ و ۲۰ سانتی‌متر و اندازه بزرگ‌ترین المان‌ها به‌ترتیب برابر ۲ و ۲/۷ متر است. هم‌چنین مش‌بندی بسیار کوچک غیریکنواخت دارای اندازه المان‌های زیر پی برابر ۳/۷ سانتی‌متر و اندازه بزرگ‌ترین المان برابر ۱ متر است. در این حالت همهٔ المان‌ها نسبت به حالت مش‌بندی کوچک، ریزتر شده‌اند. در جدول ٤ تعداد المان‌ها و گره‌های استفاده شده در مش‌بندی‌های غیریکنواخت نشان داده شده است.

جدول ٤. تعداد المان‌ها و گره‌ها در مش‌بندی‌های مختلف غیریکنواخت

β	مش‌بندی بسیار کوچک غیریکنواخت		مش‌بندی کوچک غیریکنواخت		مش‌بندی متوسط غیریکنواخت		مش‌بندی بزرگ غیریکنواخت	
	n	E	n	E	n	E	n	E
۱۰°	۱۹۸۱	۲۳۲۷	۵۷۰	۸۸۰	۳۱۲	۵۹۸	۲۸۷	٤۲۳
۲۰°	۱۳۰۹	۱۸۹۷	٤٤۷	٦۷۹	۲۷۱	٤۳۸	۱٦٦	۲۷٤
۳۰°	۹۵۷	۱٤٦۳	٤۲۵	٦٦۷	۲۰۸	٤۱۰	۱۳٦	۲۲۹

1. Plaxis software

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

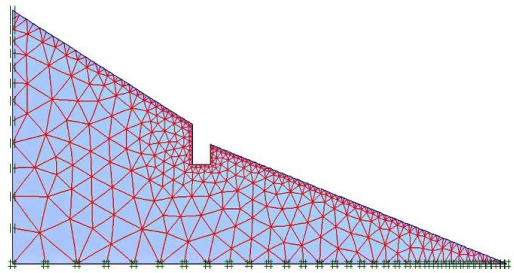
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

در جدول ٥ نتایج ظرفیت باربری حاصل از مش‌بندی‌های مختلف غیریکنواخت نشان داده شده است. چنان‌که در این جدول دیده می‌شود، نتایج بین مش‌بندی‌های غیریکنواخت کوچک و بسیار کوچک، نتایج نزدیک به یک‌دیگر دارد و در واقع دارای همگرایی هستند. مش‌بندی غیریکنواخت دارای المان‌ها و گره‌های کم‌تری نسبت به مش‌بندی یکنواخت است. در ادامه از مش‌بندی کوچک غیریکنواخت استفاده شده است.

جدول ٥. مقایسهٔ ظرفیت باربری در مش‌بندی‌های مختلف غیریکنواخت (kN/m^2)

β	مش‌بندی بسیار کوچک غیریکنواخت	مش‌بندی کوچک غیریکنواخت	مش‌بندی متوسط غیریکنواخت	مش‌بندی بزرگ غیریکنواخت
١٠°	١٣٨٤/٩٦	١٣٨٥/٦٠	١٣٩٢/٨٤	١٤٠٩/٧١
٢٠°	٩١٨/٧٤	٩١٨/٢٥	٩٢٥/٣٣	٩٤٥/٢٦
٣٠°	٦٠٣/٠٦	٦٠٣/٣٠	٦٠٨/١٩	٦٣٧/٢٠

برای بررسی تأثیر شیب بالادست بر مقدار ظرفیت باربری، مش‌بندی استفاده شده در سمت بالادست نیز مانند شیب پایین‌دست ریزتر شده است. در شکل ٨ مش‌بندی استفاده شده برای شیب بالادست ٣٠ و پایین‌دست ٢٠ درجه نشان داده شده است.



شکل ٨. مش‌بندی غیریکنواخت در شیب پایین‌دست ٢٠ و شیب بالادست ٣٠ درجه

جدول ٦. تغییرات ظرفیت باربری در تغییرات شیب بالادست

β	α	$q(kN/m^2)$
٢٠°	١٠°	٩١٢/٠٢
٢٠°	٢٠°	٩١٨/٢٥
٢٠°	٣٠°	٩٢١/٢٨

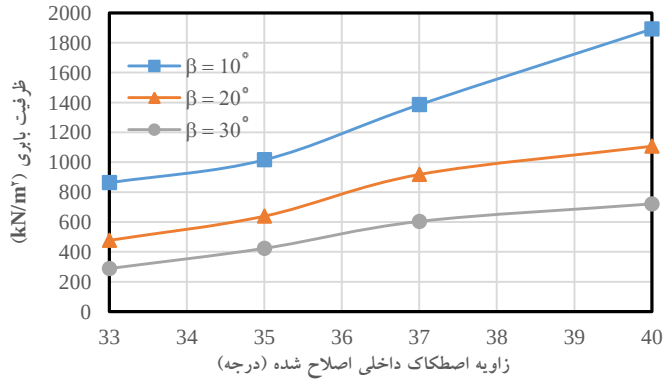
در جدول ٦ نتایج حاصل از تغییرات شیب بالادست (α) بر ظرفیت باربری، برای خاک دانه‌ای با زاویهٔ اصطکاک داخلی اصلاح شده ٣٧ درجه و وزن مخصوص ١٨ کیلونیوتن بر

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

مترمکعب نشان داده شده است. در این جدول شیب پایین‌دست همواره برابر با ۲۰ درجه است و شیب بالادست دارای تغییرات است. تغییرات شیب بالادست تأثیر بسیار کمی در نتایج دارد. این امر در صورتی است که شیب بالادست پایداری کامل داشته باشد. در حالت‌های بررسی شده به‌دلیل بیش‌تر بودن زاویهٔ اصطکاک داخلی نسبت به زاویهٔ شیب، شیب بالادست و پایین‌دست همواره پایدار است. تفاوت اندک موجود در جدول ٦، به‌دلیل تغییرات مش‌بندی و اضافه شدن المان‌ها و چیدمان جدید مش‌بندی است.

در شکل ۹ تغییرات ظرفیت باربری در زوایای مختلف اصطکاک داخلی خاک برای شیب‌هایی با زوایای مختلف پایین‌دست، منطبق بر جدول ۱، نشان داده شده است. هم‌چنین، از زاویهٔ اصطکاک داخلی اصلاح شده منطبق بر رابطهٔ (٤) استفاده شده است. چنان‌که در شکل ۹ دیده می‌شود، با افزایش زاویهٔ اصطکاک اصلاح شده خاک، مقدار ظرفیت باربری افزایش پیدا کرده است. در زوایای زیاد اصطکاک اصلاح شده، شیب ملایم ۱۰ درجه افزایش ظرفیت باربری بیش‌تری نسبت به شیب‌های ۲۰ و ۳۰ درجه دارد.



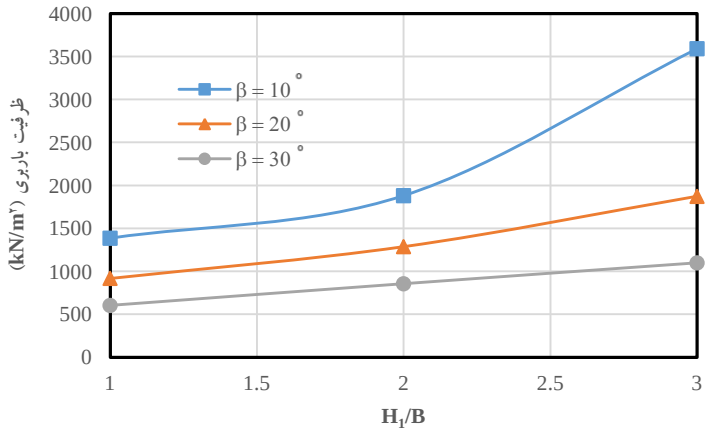
شکل ۹. تغییرات ظرفیت باربری دربرابر تغییرات زاویهٔ اصطکاک داخلی کاهش یافته خاک

در شکل ۱۰ تغییرات ظرفیت باربری در عمق‌های مختلف پایین‌دست گود برای شیب‌هایی با زوایای مختلف پایین‌دست، منطبق بر جدول ۱، نشان داده شده است. هم‌چنین، از خاک دانه‌ای با زاویهٔ اصطکاک داخلی کاهش یافته ۳۷ درجه و وزن مخصوص ۱۸ کیلونیوتن بر مترمکعب استفاده شده است. با افزایش عمق گود پایین‌دست، مقدار ظرفیت باربری افزایش پیدا کرده است. در عمق‌های زیاد پایین‌دست گود، شیب ملایم ۱۰ درجه افزایش ظرفیت باربری بیش‌تری نسبت به شیب‌های ۲۰ و ۳۰ درجه دارد. در شیب‌های تند، کاهش ظرفیت

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

باربری به‌علت کاهش حمایت جانبی خاک در سمت پایین‌دست به‌اندازه‌ای است که مانع افزایش زیاد ظرفیت باربری با توجه به عواملی مانند افزایش زاویهٔ اصطکاک خاک و افزایش عمق گود پایین‌دست می‌شود.

در جدول ۷ به بررسی تغییرات ظرفیت باربری در عمق‌های مختلف بالادست گود برای شیب‌هایی با زوایای مختلف پایین‌دست پرداخته شده است. در تمامی زوایای شیب تأثیر تغییرات عمق بالادست بسیار محدود است. این تغییرات اندک به‌دلیل مش‌بندی متفاوت و تفاوت در نرخ‌های انرژی محاسبه شده است.



شکل ۱۰. تغییرات ظرفیت باربری دربرابر تغییرات عمق پایین‌دست گود

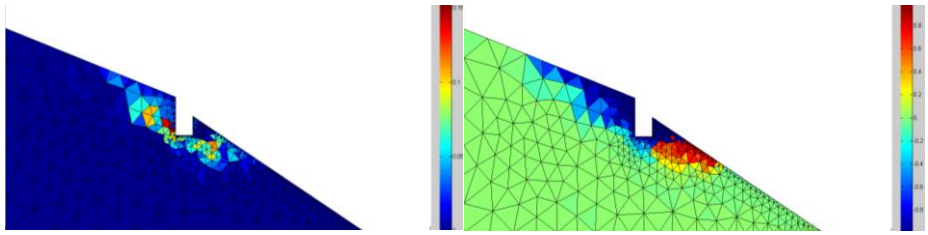
جدول ۷. تغییرات ظرفیت باربری دربرابر تغییرات عمق بالادست گود

β	$H_۲/B$= ۱	$H_۲$B= ۲	$H_۲/B$= ۳
۱۰°	۱۳۸۳/۴۸	۱۳۸۵/۶۱	۱۳۸۸/۷۴
۲۰°	۹۱۴/۷۲	۹۱۸/۲۵	۹۱۹/۲۷
۳۰°	۶۰۱/۵۰	۶۰۳/۳۴	۶۰۵/۴۶

در شکل ۱۱ کانتور میدان‌های سینماتیکی قائم و افقی در هندسه با شیب پایین‌دست ۳۰ و بالادست ۲۰ درجه نشان داده شده است. میدان‌های سینماتیکی قائم در اطراف گود پایین‌دست و گود بالادست دارای بیش‌ترین مقدار منفی و در راستای شیب پایین‌دست دارای بیش‌ترین مقدار مثبت است. میدان‌های سینماتیکی افقی در راستای گسیختگی برشی زیر پی و هم‌چنین در انتهای گود بالادست دارای بیش‌ترین مقدار است. در حالت حدی، با گسیختگی خاک زیر پی، خاک اطراف گود بالادست و پایین‌دست ناپایدار شده و دچار

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

گسیختگی می‌شود. محدودهٔ تغییرات میدان‌های سینماتیکی، نشان‌دهندهٔ تودهٔ خاک گسیخته شده است. این محدوده نسبت به شرایط مرزی فاصله دارد.



الف ب

شکل ۱۱. کانتور میدان‌های سینماتیکی الف) قائم و ب) افقی در شیب پایین‌دست ۳۰ درجه

مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده با سایر روش‌های موجود

در ادبیات فنی، روش‌ها و تحقیقات معروفی برای تخمین ظرفیت باربری پی روی شیب وجود دارد. در تمامی این روش‌ها زاویه پایین‌دست و بالادست برابر با یک‌دیگر است. با توجه به نتایج حاصل، شیب بالادست در نتایج تأثیر گذار نیست. از این‌رو، برای مقایسهٔ پژوهش حاضر با سایر روش‌ها، صرفاً تغییر شیب پایین‌دست کافی است. در ادامه نتایج روش پیشنهادی با روش‌های اجزاء محدود، تعادل حدی، تحلیل حدی و روش خطوط مشخصه مقایسه شده است. در همهٔ قیاس‌های صورت گرفته، ویژگی‌های هندسی بررسی شده مطابق با جدول ۱ است. خاک استفاده شده دارای زاویهٔ اصطکاک داخلی اصلاح شده ۳۷ درجه، زاویهٔ اتساع صفر و وزن مخصوص ۱۸ کیلو نیوتن بر مترمربع است.

در جدول ۸ مقایسه بین نتایج حاصل از روش ارائه شده با روش اجزاء محدود جابه‌جایی برنامه پلکسیس نشان داده شده است. هندسه و مش‌بندی استفاده شده در برنامه پلکسیس کاملاً مشابه با روش ارائه شده است. نتایج روش تحلیل حدی اجزاء محدود با بهینه‌سازی خطی، کمی بیش‌تر از نتایج روش اجزاء محدود جابه‌جایی است و در واقع حد بالایی از نتایج روش اجزاء محدود پلکسیس است.

برنامه پلکسیس بار حدی را نتیجه نمی‌دهد. در این راستا با اعمال جابه‌جایی مشخصی بر پی نواری، مقدار تنش زیر پی در جابه‌جایی‌های مختلف بررسی می‌شود. کاهش تنش در

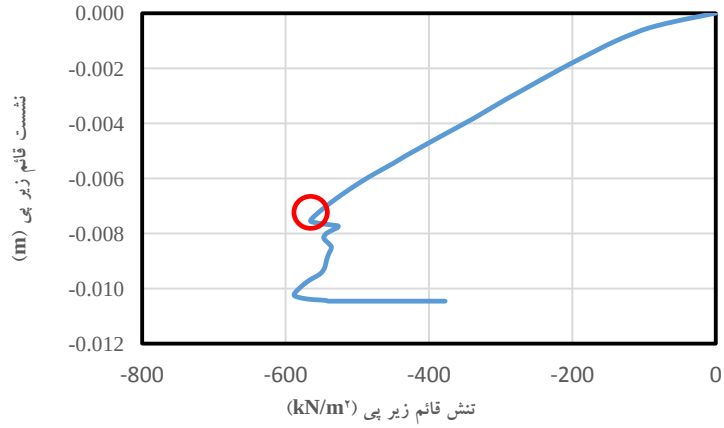
[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

افزایش جابه‌جایی، متناسب با تنش گسیختگی و ظرفیت باربری پی است. در شکل ۱۲ منحنی تنش قائم در مقابل جابه‌جایی قائم، برای پی نواری قرار گرفته روی شیب پایین‌دست ۳۰ و بالادست ۲۰ درجه نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۲، تنش گسیختگی برابر با ۵۶۰ کیلو نیوتن بر مترمربع است.

جدول ۸. مقایسهٔ نتایج روش پیشنهادی با روش اجزاء محدود جابه‌جایی (kN/m^2)

روش پیشنهادی (مش‌بندی غیریکنواخت)	روش اجزاء محدود جابجایی (پلکسیس)	α	β
۱۳۸۵/۶۰	۱۳۴۰	۲۰°	۱۰°
۹۱۸/۲۵	۸۳۰	۲۰°	۲۰°
۶۰۳/۳۰	۵۶۰	۲۰°	۳۰°



شکل ۱۲. منحنی تنش قائم-جابه‌جایی قائم برنامه پلکسیس برای شیب پایین‌دست ۳۰ و بالادست ۲۰ درجه

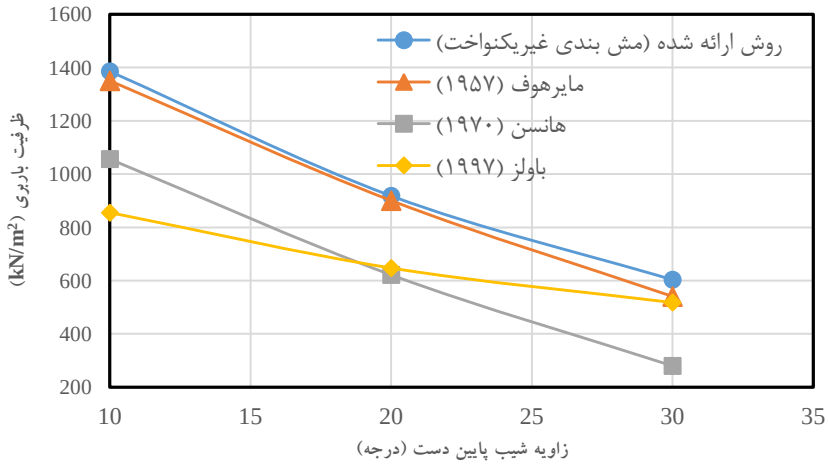
در شکل ۱۳ به مقایسه نتایج روش ارائه شده با روش‌های تعادل حدی مایرهوف[1] [۲]، هانسن[2] [۳] و باولز[3] [۵] پرداخته شده است. اساس تحلیل صورت گرفته در روش باولز [۵] کاهش طول و سطح توده خاکی گسیخته شده در حالت وجود شیب نسبت به زمین مسطح است. ترم‌های سه‌گانه ظرفیت باربری براساس کاهش سطح توده گسیخته شده، کاهش پیدا

1. Meyerhof
2. Hansen
3. Bowels

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

خواهند کرد. تفاوت هندسه روش مایرهوف (۱۹۵۷) و باولز (۱۹۹۷) نسبت به‌روش ارائه شده، برابری زاویهٔ شیب بالادست و پایین‌دست است.

هانسن [۳] مقدار ظرفیت باربری یک پی نواری در لبه شیب را بررسی کرده است. تفاوت هندسه روش هانسن (۱۹۷۰) نسبت به‌روش ارائه شده، صفر بودن زاویهٔ شیب بالادست است. با توجه به تأثیر کم مقدار شیب بالادست بر نتایج روش پیشنهادی، قیاس بین نتایج حاصل و نتایج روش هانسن صورت گرفته است. در روش تعادل حدی، منحنی گسیختگی در جهت شیب پایین‌دست بحرانی است و حل مسئله در جهت شیب پایین‌دست صورت گرفته است.



شکل ۱۳. مقایسهٔ ظرفیت باربری در روش پیشنهادی با روش‌های تعادل حدی

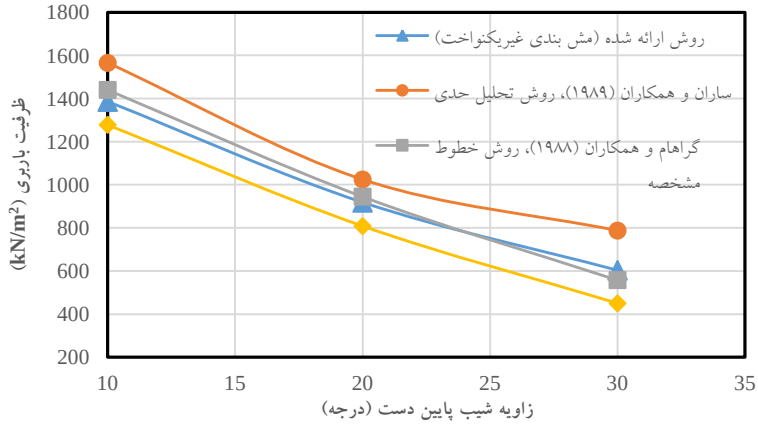
اختلاف بین روش‌های مایرهوف و هانسن، علاوه بر اختلاف در هندسه مسئله، به‌دلیل اختلاف در مکانیسم گسیختگی فرض شده است. مکانیسم روش مایرهوف مشابه روش پراندل[1] و با استفاده از گوه‌های صلب مثلثی می‌باشد. هانسن مکانیسمی مشابه ولی با گوه‌های منحنی شکل را در نظر گرفته است. چنان‌که در شکل ۱۳ دیده می‌شود، روش مایرهوف نسبت به سایر روش‌ها نزدیکی بیش‌تری به روش ارائه شده دارد. روش باولز در زوایای زیاد شیب،

1. Prandtl

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

مقدار ظرفیت باربری را نزدیک به دیگر روش‌ها نتیجه می‌دهد اما در زوایای کم شیب محافظه‌کارانه بوده و مقدار ظرفیت باربری در این روش، کم‌تر از سایر روش‌ها است.

در شکل ١٤ مقایسه بین روش‌های تحلیل حدی اجزاء محدود، تحلیل حدی قطعات صلب و روش خطوط مشخصه صورت گرفته است. روش ارائه شده نتایجی کم‌تر از روش تحلیل حدی قطعات صلب به‌روش ساران[1] و همکاران [١٠] را نشان می‌دهد. این امر نشان‌دهندهٔ ناسازگاری خاک در حالت در نظرگیری محیط خاک با قطعات صلب است. راج[2] و همکاران [٣٦] از روش تحلیل حدی اجزاء محدود با بهینه‌سازی مخروطی استفاده کرده‌اند. نتایج این تحقیق حد پایینی از روش ارائه شده است. در روش راج و همکاران (٢٠١٨) از هر دو روش مرز بالا و مرز پایین تحلیل حدی استفاده شده است. به‌دلیل اعمال تئوری مرز پایین تحلیل حدی، نتایج راج و همکاران (٢٠١٨) کم‌تر از نتایج روش ارائه شده است.



شکل ١٤. مقایسهٔ روش پیشنهادی با روش‌های تحلیل حدی و روش خطوط مشخصه

گرآهام[3] و همکاران [٧] به‌روش خطوط مشخصه، ظرفیت باربری پی در مجاورت شیب‌هایی با خاک دانه‌ای را محاسبه کرده‌اند. برای مقایسه، فاصلهٔ پی از لبه شیب صفر در نظر گرفته شده است. روش گراهام و همکاران (١٩٨٨) در زوایای شیب ٢٠ و ١٠ درجه مقادیر بیش‌تر و در زاویهٔ ٣٠ درجه ظرفیت باربری کم‌تری را نسبت به‌روش ارائه شده نشان می‌دهد. نتایج

1. Saran
2. Raj
3. Graham

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

روش خطوط مشخصه نزدیکی بیش‌تری نسبت به سایر روش‌ها به‌روش ارائه شده دارد. تفاوت هندسه روش ساران و همکاران (۱۹۸۹) و گراهام و همکاران (۱۹۸۸) نسبت به‌روش ارائه شده، صفر بودن زاویهٔ شیب بالادست است. در هندسه روش راج و همکاران (۲۰۱۸) زاویهٔ شیب بالادست و پایین‌دست برابر است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ظرفیت باربری پی نواری مستقر در شیب به‌روش تحلیل حدی اجزاء محدود با به‌کارگیری بهینه‌سازی خطی ارزیابی شد. مزیت بهینه‌سازی خطی، سرعت حل بالای آن نسبت به دیگر روش‌های بهینه‌یابی تحلیلی است. تغییرات زاویهٔ شیب و عمق گود پایین‌دست و بالادست و تغییرات زاویهٔ اصطکاک اصلاح شده خاک روی ظرفیت باربری بررسی شده است.

براساس نتایج حاصل، افزایش شیب و عمق گود پایین‌دست تأثیر به‌سزایی روی ظرفیت باربری داشته به‌طوری‌که با افزایش شیب پایین‌دست، مقدار ظرفیت باربری کاهش و با افزایش عمق پایین‌دست، ظرفیت باربری افزایش پیدا کرده است. در عمق‌های زیاد پایین‌دست گود و هم‌چنین در زوایای زیاد اصطکاک خاک، روند افزایش ظرفیت باربری در شیب ملایم ۱۰ درجه نسبت به شیب‌های ۲۰ و ۳۰ درجه بیش‌تر است. تغییرات شیب و عمق بالادست تأثیر بسیار کمی بر ظرفیت باربری دارد.

با کوچک‌تر کردن ابعاد مش‌بندی، نتایج ظرفیت باربری در محدودهٔ المان‌های بررسی شده کاهش پیدا کرده است. در حالت مش‌بندی بسیار کوچک یکنواخت به‌دلیل زیاد شدن تعداد المان‌ها و عدم تحلیل ماتریس نهایی، همگرایی بین نتایج ایجاد نشده است. در حالت مش‌بندی غیریکنواخت، با کوچک کردن ابعاد المان‌ها، بین مش‌بندی‌های کوچک و بسیار کوچک همگرایی حاصل شده است.

با توجه به نتایج حاصل برای خاک دانه‌ای بررسی شده، روش تحلیل حدی اجزاء محدود خطی، ظرفیت باربری بیش‌تری از روش‌های تعادل حدی و اجزاء محدود جابه‌جایی نتیجه داده است و حد بالایی از این روش‌ها است. روش ارائه شده، مقادیر کم‌تری نسبت به‌روش تحلیل حدی قطعات صلب نتیجه داده است و حدپایینی از روش تحلیل حدی کلاسیک است. در روش تحلیل حدی اجزاء محدود با بهینه‌سازی خطی، ظرفیت باربری بیش‌تری

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

نسبت به بهینه‌سازی مخروطی حاصل شده است. روش پیشنهادی نسبت به‌روش خطوط مشخصه در زوایای کم‌تر شیروانی مقادیر کم‌تر و در زوایای بیش‌تر شیروانی مقادیر بیش‌تری از ظرفیت باربری را نشان داده است.

منابع

1. Das B. M., "Shallow foundations bearing capacity and settlement", 3th Ed., Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW (2017) 170-182.
2. Meyerhof G. G., "The ultimate bearing capacity of foundations on slopes", IV Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., 1, London, England, (1957) 384-399.
3. Hansen J. B., "A revised and Extended Formula for Bearing Capacity", Bulletin 28, Copenhagen: Danish Geotechnical Institute (1970).
4. Narita K., Yamaguchi, H., "Bearing capacity analysis of foundations on slopes by use of log-spiral sliding surfaces", Soils Foundation, 30(3), (1990) 144-152.
5. Bowles J. E., "Foundation analysis and design", 5th Ed., Elsevier, McGraw-Hill, Singapore (1997) 258-263.
6. Sokolovski V. V., "Statics of granular media", Butterworth Scientific Publications, London (1960).
7. Graham J., Andrews M., Shields D. H., "Stress characteristics for shallow footings in cohesionless slopes", Canadian Geotech. J, Vol. 25, 2 (1988) 238-249.
8. Kumar J., Mohan Rao V. B. K., "Seismic bearing capacity of foundations on slopes", Geotechnique, Vol. 53, 3 (2003) 347-361.
9. Davis E. H., Booker J. R., "Some adaptations of classical plasticity theory for soil stability problems", Proceedings of the Symposium on the Role of Plasticity in Soil Mechanics, A.C. Palmer, Cambridge University, Cambridge, UK, (1973) 24-41.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

10. Kusakabe O., Kimura T., Yamaguchi H., "Bearing capacity of slopes under strip loads on the top surface", Soils Foundation, Vol. 21, 4 (1981) 29-40.
11. Saran S., Sud V. K., Handa S. C., "Bearing capacity of footings adjacent to slopes", J. Geotech. Eng., Vol. 115, 4 (1989) 553.
12. Michalowski R. L., "Three-dimensional analysis of locally loaded slopes", Géotechnique, Vol. 39, 1 (1989) 27-38.
13. Farzaneh O., Askari F., Ganjian N., "Three dimensional stability analysis of convex slopes in plan view", Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 134, 8 (2008) 1192-1200.
14. Lysmer J., "Limit analysis of plane problems in soil mechanics", J. Soil Mechanics Foundation Division, ASCE, Vol. 96 (1970) 1311-1334.
15. Shiau J. S., Merifield R. S., Lyamin A. V., Sloan S. W., "Undrained stability of footings on slopes", International Journal of Geomechanics, ASCE, Vol. 11, 5 (2011) 381-390.
16. Mofidi J., Farzaneh O., Askari F., "Bearing Capacity of Strip Footings near Slopes Using Lower Bound Limit Analysis", Civil Engineering Infrastructures Journal, Vol. 47, 1 (2014) 89-109.
17. Chen W. F., "Limit analysis and soil plasticity", Elsevier Science, Amsterdam, Netherlands (1975) 399-445.
18. Duncan J. M., "State-of-the-art: Limit equilibrium and finite element analysis of slopes", J. Geotech. Eng., Vol. 1227 (1996) 577-596.
19. Michalowski R. L., "Stability charts for uniform slopes", J. Geotech. Geoenviron. Eng., Vol. 1284 (2002) 351-355.
20. Michalowski R. L., "Limit analysis and stability charts for 3D slope failures", Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 136, 4 (2010) 583-93.
21. Aminpoor M. M., Ghanbari A., "Design Charts for Yield Acceleration and Seismic Displacement of Retaining Walls with Surcharge through

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

Limit Analysis", Structural Engineering and Mechanics, Vol .52, 6 (2014) 1225-1256.

22. Aminpour M. M., Maleki, M., Ghanbari A., "Investigation of the effect of surcharge on behavior of soil slopes", Geomechanics and Engineering, Vol .13, 4 (2017) 653-669.
23. Aminpour M. M., Maleki, M., Ghanbari A., "Predicting Seismic Permanent Displacement of Soil Walls under Surcharge Based on Limit Analysis Approach", Earthquake Engineering and Engineering Vibration, (Accepted, In Press).
24. Sloan S. W., "Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming", Int. J. Numer. Analysis Meth. Geomech, Vol. 13 (1989) 263-282.
25. Yu H. S., Sloan S. W., "Upper–bound limit analysis of a rigid-plastic body with frictional interfaces", Int. J. Mech.Sci., Vol. 36, 3 (1994) 219-229.
26. Sloan S. W., Kleeman P. W., "Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 127 (1995) 293-314.
27. Lyamin A. V., Sloan S. W., "Upper bound limit analysis using linear finite elements and nonlinear programming", Int. J. Numer. Analyt. Methods Geomech, Vol. 26, 2 (2002) 181-216.
28. Shiau S. H., Lyamin A. V., Sloan S. W., "Bearing capacity of a sand layer on clay by finite element limit analysis", Can. Geotech. J., Vol. 40, 5 (2003) 900-915.
29. Hjiaj M., Lyamin A. V., Sloan S. W., "Bearing capacity of a cohesive-frictional soil under non-eccentric inclined loading", Comput. Geotech, Vol. 31, 6 (2004) 491-516.
30. Hjiaj M., Lyamin A.V., Sloan S. W., "Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N_g", Int. J. Solids Struct, Vol. 42 (2005) 1681-1704.

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]

31. Kumar J., Bhattacharya P., "Bearing capacity of interfering multiple strip footings by using lower bound finite elements limit analysis", Computers and Geotechnics, Vol. 37 (2010) 731-736.
32. Sloan S. W., "Geotechnical stability analysis", Géotechnique, Vol. 63, 7 (2013) 531-572.
33. Shiau J. S., Merifield R. S., Lyamin A. V., Sloan S. W., "Undrained stability of footings on slopes", International Journal of Geomechanics, Vol. 11, 5 (2011) 381-390.
34. Yang X., Chi S., "Upper bound finite element analysis of slope stability using a nonlinear failure criterion", Computers and Geotechnics, Vol. 54 (2013) 185-191.
35. Tschuchnigg F., Schweiger H. F., Sloan S. W., "Slope stability analysis by means of finite element limit analysis and finite element strength reduction techniques. Part I: Numerical studies considering non-associated plasticity", Computers and Geotechnics, Vol. 70 (2015) 169-177.
36. Raj D., Singh Y., Shukla S. K., "Seismic Bearing Capacity of Strip Foundation Embedded in c-ϕ Soil Slope", International Journal of Geomechanics, Vol. 18, 7 (2018) 1-16.
37. Griva I, Nash SG, Sofer A., "Linear and nonlinear optimization. Society for industrial and applied mathematics", George Mason University, Fairfax, Virginia (2009).

[Downloaded from isharat.khu.ac.ir on 2026-10-29]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1399.14.1.6.4]